La correspondance bosons-fermions

Raphaël CÔTE **Marc GLISSE**

Sous la direction de Marc ROSSO

14 juin 2001

Table des matières

Introduction

Avec l'émergence de la mécanique quantique, les physiciens — notamment sous l'impulsion de Dirac, Heisenberg, etc. — ont développé de nouveaux outils, en particulier en théorie spectrale, en algèbre non commutative et en algèbre de Lie. En effet une notion essentielle en mécanique quantique est la notion de commutateur de deux opérateurs quantiques (qui est un crochet de Lie), c'est-à-dire d'opérateurs auto-adjoints agissant sur l'espace des états. Les relations de commutation qui découlent de la formalisation quantique permettent de décrire l'évolution du système considéré.

Tout ce travail a donné lieu à une certaine effervescence dans le milieu des mathématiciens, qui introduisirent et étudièrent, et étudient encore, des algèbres d'opérateurs munis de relations.

L'objet de ce mémoire est d'étudier les algèbres de Clifford, qui intervient dans la théorie électronique et positronique à plusieurs particules, et donc l'interaction bosons-fermions. À travers cet exposé, grâce à la correspondance bosons-fermions, nous obtiendrons aussi de remarquables identités arithmétiques qu'il est très difficile d'obtenir directement.

Première partie : Bosons et fermions

1 Préliminaires

1.1 Rappels

Définition 1 – Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un module sur un anneau $\mathbb{A}$, muni d'une application $\mathbb{A}$-bilinéaire notée $[\cdot,\cdot]$ qui vérifie les relations suivantes :

$$\begin{gathered}[a,b]+[b,a]=0 \qquad \text{(antisymétrie)}\\ [a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0 \qquad \text{(identité de Jacobi)}\end{gathered}$$

<u>Remarque</u> : Dans notre cas, $\mathbb{A}$ sera toujours un corps que l'on notera $\mathbb{K}$.

Définition 2 – Soit M un semi-groupe. Un espace vectoriel V M-gradué est une somme directe :

$$V=\bigoplus_{\alpha\in M} V_\alpha$$

Une algèbre graduée $\mathbf{A}$ est une algèbre qui est graduée en tant qu'espace vectoriel, et dont la graduation est compatible avec la structure d'algèbre au sens suivant :

$$\forall(\alpha,\beta)\in M, \quad [\mathbf{A}_\alpha,\mathbf{A}_\beta]\subset\mathbf{A}_{\alpha+\beta}$$

Définition 3 – Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle *représentation* de $\mathfrak{g}$ dans E un morphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $gl(E)$.

Une représentation ρ de $\mathfrak{g}$ dans E est donc une application $\mathbb{A}$-linéaire à valeurs dans l'espace vectoriel des endomorphismes de E, telle que pour tous $\nu\in E$, $x,y\in\mathfrak{g}$:

$$\rho([x,y])\cdot\nu=\rho(x)\circ\rho(y)\cdot\nu-\rho(y)\circ\rho(x)\cdot\nu$$

Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans E. On suppose $\mathfrak{g}$ munie d'une anti-involution anti-linéaire ω c'est-à-dire une involution (malgré son nom !) $\mathbb{R}$-linéaire vérifiant :

$$\omega([x,y]) = [\omega(x), \omega(y)] \quad \text{et} \quad \omega(\lambda x) = \bar{\lambda}\omega(x)$$

pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On suppose de plus que E est muni d'une forme hermitienne $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Alors on dit que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est *contravariante* si elle vérifie :

$$\langle \rho(\psi)\nu|\nu'\rangle = \langle \nu|\rho(\omega(\psi))\nu'\rangle$$

pour tous $\nu, \nu' \in E$, $\psi \in \mathfrak{g}$. La représentation ρ est dite *unitaire* si de plus la forme est définie positive :

$$\nu \in E\backslash\{0\} \Longrightarrow \langle\nu|\nu\rangle > 0$$

Définition 4 – Une représentation ρ sur E est irréductible si elle n'admet pas de sous-représentations non triviale, i.e. pour $N \subsetneq E$, $\rho(N) \subset N \Longrightarrow N = 0$.

Une représentation E est faiblement irréductible si pour tous sous-espaces M, N de E tels que $E = M \oplus N$, et M, N sont des sous-représentations de V, alors $M = 0$ ou $N = 0$.

1.2 Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Une algèbre associative A est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie par le crochet $[x, y] = x.y - y.x$. Pour une algèbre de Lie $\mathfrak{d}$ on dispose alors de la notion de morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie associée à A.

On ne considérera par la suite que des algèbres A associatives et unitaires. Les morphismes d'algèbres seront supposés préserver l'élément neutre.

On définit l'algèbre enveloppante $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ par la propriété universelle suivante : $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre munie d'un morphisme d'algèbres de Lie $i : \mathfrak{g} \to \mathbb{U}(\mathfrak{g})$ tel que pour toute algèbre A et tout morphisme d'algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to A$ il existe un unique morphisme d'algèbres $g : \mathbb{U}(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $f = g \circ i$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & \mathbb{U}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

On peut construire $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ explicitement comme le quotient de l'algèbre tensorielle

$$T\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}^{\otimes^n}$$

par l'idéal engendré par les éléments de la forme :

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \text{ avec } x, y \in \mathfrak{g}$$

On obtient ainsi une algèbre unitaire associative qui hérite de la filtration de $T\mathfrak{g}$ définie par : $(T\mathfrak{g})_n = \bigoplus_{i \leq n} \mathfrak{g}^{\otimes^i}$.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt affirme que l'algèbre graduée correspondante n'est autre que l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ définie comme le quotient de $T\mathfrak{g}$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$ pour x et y dans $\mathfrak{g}$. On en déduit :

Théorème 1 – *Si $\mathfrak{g}$ admet une base $(v_i)_{i\in I}$ totalement ordonnée par $<$, les éléments de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ $v_{i_1}...v_{i_n}$ avec $i_1 < ... < i_n$ auxquels on ajoute $1 \in \mathbb{U}(\mathfrak{g})$ forment une base de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$.*

On peut aussi remarquer que si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux algèbres de Lie, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ muni du crochet de Lie canonique $[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1] + [x_2, y_2]$ est aussi $\mathbb{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \mathbb{U}(\mathfrak{g}_2)$.

Notons qu'à une représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ d'algèbre de Lie est associée une unique représentation de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire un morphisme d'algèbres $\mathbb{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$. Ceci nous permettra par la suite des abus et on parlera facilement de $\mathfrak{g}$ à la place de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$.

2 Bosons et fermions

On définit d'abord les objets mathématiques associés à ces deux types de particules.

2.1 Définitions

Nous allons maintenant définir la structure d'algèbre de Clifford, par une construction générale. On se donne donc un corps $\mathbb{K}$ et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$V^{\otimes^n} \hat{=} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ termes}} \quad (V^{\otimes^0} = \mathbb{K})$$

On considère l'algèbre tensorielle graduée $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$ munie du produit associatif usuel :

$$\begin{array}{rcl} \otimes \ : V^{\otimes^n} \times V^{\otimes^m} & \to & V^{\otimes^{n+m}} \\ (a, b) & \mapsto & a \otimes b \end{array}$$

On suppose que V est munie d'une forme quadratique $\langle \cdot | \cdot \rangle$, et on note $\mathcal{I}$ l'idéal bilatère :

$$\mathcal{I} = \langle x \otimes y + y \otimes x - \langle x|y\rangle / x, y \in V \rangle$$

Alors l'algèbre de Clifford associée à V est $Cl = T(V)/\mathcal{I}$.

On dit que l'algèbre ainsi construite a pour générateurs les éléments d'une base de V.

Cependant dans notre cas, on considérera toujours $V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_i \oplus \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_i^*$, et la forme bilinéaire définie par : $\langle \psi_i | \psi_j^* \rangle = \delta_{ij}, \langle \psi_i | \psi_j \rangle = 0, \langle \psi_i^* | \psi_j^* \rangle = 0$

On vérifie que l'algèbre ainsi définie est unitaire, et possède les propriétés voulues, c'est-à-dire les relations de commutations, l'associativitée et l'existence d'un élément unité ($1 \in V^{\otimes^0} = \mathbb{K}$).

On résume en général la situation par :

Définition 5 – Une algèbre de Clifford Cl est une algèbre associative sur $\mathbb{C}$ avec élément unité sur les générateurs ψ_i et ψ_i^*, appelés fermions libres, avec les relations suivantes, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \psi_i \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i & = & \delta_{ij} \\ \psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i & = & 0 \\ \psi_i^* \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i^* & = & 0 \end{array}$$

Enfin, on munit Cl d'une anti-involution antilinéaire ω :

$$\omega(\psi_j) = (-1)^j \psi_j^*, \quad \omega(\psi_j^*) = (-1)^j \psi_j$$

Définition 6 – On appelle *module de spin* sur Cl un Cl-module irréductible V qui admet un vecteur non-nul $|0\rangle$, appelé le vecteur vide, satisfaisant :

$$\begin{aligned} \psi_j|0\rangle &= 0 \quad \text{pour} \quad j \leq 0 \\ \psi_j^*|0\rangle &= 0 \quad \text{pour} \quad j > 0 \end{aligned}$$

Il existe un module de spin V et celui-ci est unique à isomorphisme près.

Preuve : On construit V en choisissant un vecteur $|0\rangle$ et en considérant l'espace vectoriel engendré par la base formelle des vecteurs de la forme :

$$\psi_{i_s}^* \ldots \psi_{i_1}^* \psi_{j_r} \ldots \psi_{j_1}|0\rangle$$

$$\text{avec } j_r > \ldots > j_1 > 0 \geq i_1 > \ldots > i_s$$

Ceci induit bien une représentation irréductible de Cl. Maintenant, si on a une autre représentation irréductible W de Cl, elle contient bien évidemment V (au sens où on identifie les deux vecteurs vides). Comme W est irréductible et $> V \neq 0$, $W = V$. $\square$

On appelle alors fermions libres les ψ_i et ψ_i^* ou les séries génératrices :

$$\psi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j z^j, \quad \psi^*(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j^* z^{-j}$$

Définition 7 – L'algèbre de l'oscillateur — ou algèbre de Heisenberg — est l'algèbre de Lie notée $\mathcal{A}$ de base $\alpha_n (n \in \mathbb{Z}), K$ vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m,-n}K, \quad [K, \alpha_m] = 0$$

les α_n sont appelés les bosons.

Remarque : L'intérêt de différencier K et α_0 (qui ont les mêmes relations de commtutations) vient de ce qu'on répresente en général K par une homothétie et α_0 par une somme directe d'homothéties, telle que chaque espace de la somme directe soit stable par tous les α_n. Pour plus de précisions, voir dans la suite.

2.2 Bosonisation

Cette opération consiste à introduire les sommes qu'on appellera bosons :

$$\alpha_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} :\psi_j \psi_{j+k}^*: \quad , \quad k \in \mathbb{Z},$$

où : $\psi_i \psi_j^*$: désigne $\psi_i \psi_j^*$ si $j > 0$ et $-\psi_j^* \psi_i$ sinon.

Cette somme formelle n'a *a priori* aucun sens, car elle porte sur un nombre infini de termes. Cependant pour toutes les représentations que nous étudierons, on s'apercevra que lorsque qu'on appliquera α_k à un vecteur de la représentation, seul un nombre fini de termes interviendront, et α_k sera donc correctement défini, pour $k \neq 0$. Pour α_0, l'ordre normal intervient (d'ailleurs on peut remarquer que l'ordre normal ne joue un rôle que pour $k = 0$, vu les relations de commutations), et permet justement d'obtenir à nouveau une définition correcte.

On appelle alors bosons libres les α_n ou la série formelle :

$$\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n}$$

Ces relations peuvent se récrire de façon plus compacte :

$$\alpha(z) =: \psi(z)\psi^*(z) :$$

On peut donc exprimer les bosons à l'aide des fermions.

L'objet de ce qui va suivre — en partie — sera de montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que les fermions peuvent s'écrire en fonction des bosons. C'est cela que l'on appelle la correspondance bosons-fermions.

Lemme 2 *On a les relations suivantes :*

$$[\alpha_k, \psi_j] = \psi_{j-k}, \quad [\alpha_k, \psi_j^*] = \psi_{j+k}^*$$

On vérifie que les bosons issus de la bosonisation des fermions vérifient les relations de l'algèbre oscillatrice, ce qui justifie a posteriori *leur appellation.*

Preuve : On vérifie immédiatement que $[\psi_i\psi_{i+k}^*, \psi_j] = 0$ sauf si $j = i + k$, auquel cas cela donne ψ_{j-k} ; de même, $[\psi_i\psi_{i+k}^*, \psi_j^*] = 0$ sauf pour $i = j$ auquel cas on obtient ψ_{j+k}^*. □

3 Représentations de poids maximal

3.1 Aspect général

Définition 8 – Nous appellerons *représentation de poids maximal* pour une algèbre de Clifford [resp. pour une algèbre de Heisenberg] une représentation dans un espace V qui admet une vecteur non nul ν, appelé le vecteur de poids maximal, et un h [un couple c, h] nommé poids maximal , tels que :

$$\begin{array}{ccc} \psi_0(\nu) & = & h\nu \\ [\alpha_0(\nu) = h\nu & \text{et} & K(\nu) = c\nu] \\ i > 0 & \Longrightarrow & \psi_i(\nu) = 0 \end{array}$$

et V est engendré par les vecteurs de la forme

$$\begin{array}{ll} \psi_{-i_k} \ldots \psi_{-i_1}(\nu) & \text{pour} \quad 0 < i_1 \leq \ldots \leq i_k \\ [\alpha_{-i_k} \ldots \alpha_{-i_1}(\nu) & \text{pour} \quad 0 < i_1 \leq \ldots \leq i_k] \end{array}$$

Si de plus les vecteurs ci-dessus sont linéairement indépendants, alors cette représentation est dite de Verma.

Remarque : Ce n'est pas la notion standard, mais c'est est la plus pratique dans le cadre de cet exposé.

Proposition 3 *Soit (V, ν, h) une représentation de poids maximal. On suppose que l'espace propre associé à la valeur propre h de ψ_0 est de dimension 1, et ψ_0 diagonalisable. Alors V est irréductible au sens faible.*

Preuve : Si V, de poids maximal, n'est pas irréductible, V peut être écrit sous la forme $V = U \oplus U^{\perp}$ où chaque sous-espace de la décomposition est une représentation. Or toute représentation W admet la décomposition :

$$W = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (W \cap Cl_j)$$

où Cl_j est l'espace propre associé à la valeur propre λ_j de ψ_0. Mais le vecteur vide engendre l'espace propre associé à h, et donc, il appartient à U ou à $U^{\perp}$, mettons U pour fixer les idées, d'où il découle que tous les vecteurs appartiennent à U, et le résultat. □

Les représentations de poids maximal vont faire l'objet d'une étude détaillée car elle permettent d'obtenir beaucoup d'informations sur les bosons et les fermions. Initialement, Dirac avait modélisé ses ensembles d'électrons en interaction par une représentation qui s'est révélée être de poids maximal : la "mer d'électrons". C'est seulement plus tard que la notion fut généralisée.

On va cependant étudier d'abord un exemple de représentation de l'algèbre oscillatrice : l'espace de Fock.

3.2 Une représentation générique de $\mathcal{A}$: l'espace de Fock B

On considère l'espace de Fock $B = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ des polynomes en une infinité de variables. On considère la représentation suivante de l'algèbre de l'oscillateur $\mathcal{A}$. On pose, pour μ, $h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^{\star}$:

$$\begin{array}{rcll} \psi_n & = & \epsilon_n \dfrac{\partial}{\partial x_n} & \text{opérateurs d'annihilation} \\ \psi_{-n} & = & h\epsilon_n^{-1} n x_n & \text{opérateurs de création} \\ \psi_0 & = & \mu \mathrm{Id} & \\ h & = & h\mathrm{Id} & \end{array}$$

On définit de plus :

$$\omega(\psi_n) = \psi_{-n}$$

Ceci, vu les relations de commutations, est donc une représentation de $\mathcal{A}$ sur B, où :

$$\begin{array}{ccc} \alpha_n & \longrightarrow & \psi_n \\ K & \longrightarrow & h \end{array}$$

Lemme 4 *Si $h \neq 0$, cette représentation de $\mathcal{A}$ est irréductible (au sens fort).*

Preuve : Tout polynôme de B peut être réduit à 1 en appliquant les dérivations, puis en appliquant les multiplications, on obtient n'importe quel autre polynôme de B, pourvu que $h \neq 0$. □

On vérifie que le polynôme constant $\nu = 1$ est le vecteur vide et qu'il vérifie :

$$\begin{aligned} \psi_n(\nu) &= 0 \quad \text{pour } n > 0 \\ \psi_0(\nu) &= \mu\nu \\ h(\nu) &= h\nu \end{aligned}$$

Proposition 5 *Soit V une représentation dont le vecteur vide ν vérifie les équations précédentes. Alors les vecteurs de la forme $\psi_{-i_1}^{k_1} \ldots \psi_{-i_n}^{k_n} \nu$ ($k_i > 0$) sont linéairement indépendants. Si V est de poids maximal, elle est donc de Verma, et de plus elle est équivalente à la représentation donnée par B. En particulier, c'est le cas si V est irréductible.*

Preuve : On a un morphisme ϕ de B dans V, par :

$$\phi\left(P\left((x_i)_i\right)\right) = P\left(\frac{\epsilon_n}{hn}\psi_{-n}\right)(\nu)$$

Si $P \in B$, on a $\psi_n(\phi(P)) = \phi(\psi_n(P))$. Comme B est irréductible au sens fort, $\ker \phi = 0$ et donc ϕ est un isomorphisme sur son image. □

Proposition 6 *Soit V comme précédemment. Alors V possède une unique structure hermitienne $\langle\cdot|\cdot\rangle$ contravariante vis-à-vis de ω telle que $\langle\nu|\nu\rangle = 1$. Les monômes $\psi_{-1}^{k_1} \ldots \psi_{-n}^{k_n}(\nu)$ ($k_i > 0$) forment alors une base orthogonale, et ont pour norme :*

$$\langle \psi_{-1}^{k_1} \ldots \psi_{-n}^{k_n}(\nu) | \psi_{-1}^{k_1} \ldots \psi_{-n}^{k_n}(\nu) \rangle = \prod_{j=1}^{n} k_j!\, h^{k_j}$$

Preuve : On prouve l'orthogonalité et le calcul de la norme par récurrence sur $k_1 + \ldots + k_n$, et on en déduit l'unicité. □

En fait, cette proposition découle de l'universalité de B et de :

Définition 9 – On appelle espérance du vide d'un polynome $P \in B$ et on note $\langle P \rangle$ son terme constant.

On définit alors pour $P, Q \in B$:

$$\langle P|Q \rangle = \langle \omega(P) Q \rangle$$

Alors cette forme est la forme hermitienne décrite par la proposition précédente.

Définition 10 – On appelle *degré* d'un monôme $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ l'entier $k_1 + 2k_2 + \cdots + n \cdot k_n$. Cela revient à dire : $\deg(x_j) = j$. Soit B_j l'espace vectoriel engendré par les monômes de degré j ; B_j est de dimension $p(j)$, le nombre de partition de $j \in \mathbb{N}$. On a évidemment :

$$B = \bigoplus_{j=0}^{\infty} B_j$$

Cette décomposition est appelée la *graduation principale* de B.

Enfin on définit la q-dimension de B par :

$$\dim_q B = \sum_{j=0}^{\infty} \dim B_j \cdot q^j$$

On a :

$$\dim_q B = \sum_{j=0}^{\infty} p(j) q^j = \frac{1}{\prod_{j\geq 1}(1-q^j)} = \frac{1}{\varphi(q)}$$

En effet, si on développe le produit, on obtient :

$$\prod_{j\geq 1} \sum_k q^{jk} = \sum_{\substack{j_1,\ldots j_n \\ k_1,\ldots k_n}} q^{j_1 k_1 + \ldots + j_n q_n}$$

donc le terme q^j a pour coefficient le nombre de partitions de j, d'où l'égalité annoncée.

3.3 L'espace $\Lambda^\infty V$

Voici donc l'équivalent mathématique de la "mer électronique" de Dirac.

On considère ici $V = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\nu_j$, i.e. les $(\nu_j)_j$ forment une base de V. L'espace $\Lambda^\infty V$ est l'espace extérieur infini associé à V. On notera $\wedge$ le produit extérieur. $\Lambda^\infty V$ est donc engendré par les monômes semi-infinis : $\nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \ldots$

Pour définir proprement ces produits infinis, on peut voir $\Lambda^\infty V$ comme l'ensemble vectoriel engendré par les suites d'entiers strictements décroissantes. Le monôme ci-dessus est représenté par $(i_0, i_{-1}, i_{-2}, \ldots)$., et ces monômes forment une base. Le produit extérieur est alors obtenu en faisant formellement les calculs sur des monômes semi-infinis, et en définissant le produit comme étant le résultat formel obtenu.

Définition 11 – On note $F^{(0)} = \Lambda^\infty_{(0)} V$ l'espace formel des vecteurs du type :

$$\phi = \nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \ldots$$

tels que la suite $(i_j)_{j\in\mathbb{Z}^-}$ soit strictement décroissante et $i_k = k$ pour k assez proche de $-\infty$.

On définit alors l'énergie (le degré) associée à ψ :

$$\deg \phi = \sum_{s=0}^{\infty} (i_{-s} + s)$$

(cela existe car seul un nombre fini de termes sont non nuls par la deuxième condition.)

Un vecteur a un rôle particulier :

$$|0\rangle = \nu_0 \wedge \nu_{-1} \wedge \nu_{-2} \wedge \ldots$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $\{k_0, \ldots k_n\}$ une partition décroissante de k : $k = k_0 + \ldots + k_n$, et $k_0 \geq \cdots \geq k_n$. Alors on peut définir le vecteur ϕ :

$$\phi = \nu_{k_0 - 0} \wedge \nu_{k_1 - 1} \wedge \ldots \wedge \nu_{k_n - n} \wedge \nu_{-(n+1)} \wedge \ldots$$

Proposition 7 *Soit $F_k^{(0)}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de degré k. Alors :*

$$F^{(0)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} F_k^{(0)}, \quad F_0^{(0)} = \mathbb{C}|0\rangle$$
$$\dim F_k^{(0)} = p(k)$$
$$\dim_q F^{(0)} = \frac{1}{\varphi(q)}$$

Proposition 8 *Soit* $\phi = \nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \nu_{i_{-2}} \wedge \dots$

On a la formule (recette de Dirac) :

$$\deg \phi = \sum_{\substack{s \text{ tel que } i_s > 0 \text{ et} \\ i_s \text{ apparaît dans } \phi}} i_s - \sum_{\substack{s \text{ tel que } i_s \leq 0 \text{ et} \\ i_s \text{ n'apparaît pas dans } \phi}} i_s$$

Preuve : On suppose que $i_n = n$ pour $n \geq N$ et que $i_K > 0 \geq i_{K+1}$. Alors K est le nombre de $s < 0$ qui n'apparaissent pas dans ψ (il y a K "trous" dans les indices négatifs, et K électrons dans des états d'énergie positive).

$$\begin{aligned}
\deg \phi &= \sum_{s=0}^{K} i_{-s} + \sum_{s=K+1}^{N} i_{-s} + \frac{N(N+1)}{2} \\
&= \sum_{s=0}^{K} i_{-s} + \left(\sum_{s=0}^{N} (-s) - \sum_{s, -N \leq s \leq 0, s \neq i_k} s \right) + \frac{N(N+1)}{2} \\
&= \sum_{s=0}^{K} i_{-s} - \sum_{s, s \neq i_k} (-s)
\end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat cherché. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de généraliser notre étude par l'introduction de l'espace F.

Définition 12 – Soit $F^{(m)}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs du type :

$$\phi = \nu_{i_m} \wedge \nu_{i_{m-1}} \wedge \nu_{i_{m-2}} \wedge \dots$$

où $(i_s)_s$ est strictement décroissante et $i_k = k$ pour k assez proche de $-\infty$. Soit

$$|m\rangle = \nu_m \wedge \nu_{m-1} \wedge \nu_{m-2} \wedge \dots$$

C'est le vecteur de réference de $F^{(m)}$. On définit le degré du vecteur $\phi \in F^{(m)}$ considéré plus haut :

$$\deg \phi = \sum_{s=0}^{\infty} (i_{m-s} + s - m).$$

Remarque : un élément de $F^{(m)}$ peut être vu comme un élément de $F^{(0)}$ où tous les les indices ont été décalés de la charge m. Le degré est alors le même dans $F^{(m)}$ et dans $F^{(0)}$.On a donc comme précédemment :

$$\deg \phi = \sum_{\substack{s \text{ tel que } i_s > m \text{ et} \\ i_s \text{ apparaît dans } \phi}} i_s - \sum_{\substack{s \text{ tel que } i_s \leq m \text{ et} \\ i_s \text{ n'apparaît pas dans } \phi}} i_s.$$

Les physiciens appellent m le nombre de charge. Enfin, chaque $F^{(m)}$ posséde une décomposition du type de $F^{(0)}$, et donc les $F_k^{(m)}$ à k donné ont même dimension et les $F^{(m)}$ ont même q-dimension.

3.4 Représentations dans F

On pose :

$$F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)}$$

Définition 13 – On définit les opérateurs *produit extérieur* et *contractant* respectivement ψ_j et ψ_j^* sur F par :

$$\psi_j(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots) = \begin{cases} 0 \text{ si } \exists s /\ j = i_s \\ (-1)^s \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_s} \wedge \nu_j \wedge \nu_{i_{s+1}} \wedge \dots \text{ si } i_s > j > i_{s+1} \end{cases}$$

$$\psi_j^*(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots) = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall s,\ j \neq i_s \\ (-1)^{s+1} \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_{s-1}} \wedge \nu_{i_{s+1}} \wedge \dots \text{ si } i_s = j \end{cases}$$

En fait, ψ_j est simplement la multiplication par j relativement à $\wedge$, et ψ_j^* est la division par j, lorsqu'elle est possible.

Proposition 9 *On a :*

$$\begin{aligned} \psi_i \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i &= \delta_{ij} \\ \psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i &= 0 \\ \psi_i^* \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i^* &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi les opérateurs ψ_j et ψ_j^* définissent une représentation de l' algèbre de Clifford Cl. De plus, on a :

$$\psi_j|0\rangle = 0 \text{ pour } j \leq 0, \quad \psi_j^*|0\rangle = 0 \text{ pour } j > 0$$

L'espace F est un Cl-module, (fortement) irréductible de surcroît. C'est donc le module de spin de Cl.

Preuve : Pour les relations de commutations, il suffit de considérer l'action sur les monômes : par exemple, si ν_i n'apparaît pas dans le monôme ϕ, $\psi_i \psi_i^* \phi = 0$ et $\psi_i^* \psi_i \phi = \phi$. On traite tous les cas de la même façon.

Pour l'irréductibilité de F : soit N une sous-représentation. N contient une somme de monômes non nulle :

$$\phi = \sum_j \lambda_j \nu_{i_{m_j}} \wedge \nu_{i_{m_j - 1}} \wedge \dots$$

avec $\lambda_j \neq 0$, et les monômes qui apparaissent sont tous distincts. On suppose qu'aucun ν_n n'intervient dans ces monômes pour $n \geq M$ (c'est possible en prenant M assez grand). On appelle nombre de trous le nombre de ν_j qui manquent pour obtenir $|M\rangle$ à un scalaire près. On choisit un monôme qui possède un nombre maximal de trous (que l'on note μ, il est associé à λ_k) et on complète dans μ tous les trous en appliquant les ψ_j où les ν_j manquent, pour $j \leq M$.

Le vecteur obtenu est $(-1)^p \lambda_k |M\rangle$ (p est un entier quelconque) : en effet, pour tout autre monôme η apparaissant dans ϕ, il existe ν_l tel que ν_l n'apparaît pas dans μ, mais apparaisse dans η (sinon, vu que η a moins de trous que μ, les deux possèderaient les mêmes trous et les deux monômes seraient colinéaires, ce que l'on a exclu). Quand on applique ψ_l, le terme correspondant à η disparaît, et donc il ne reste qu'un seul monôme, celui provenant de μ. Le $(-1)^p$ vient des produits extérieurs.

Par produit extérieur et contraction, on obtient tous les $|m\rangle$. Enfin, si $\phi = \nu_{i_1} \wedge \ldots \wedge \nu_{i_k} \wedge \nu_{k+m} \wedge \nu_{k+m-1} \wedge \ldots$, on a :

$$\phi = \psi_{i_1} \ldots \psi_{i_k} |k+m\rangle$$

Finalement $F = N$. □

Définition 14 – On note :

$$\begin{aligned} GL_\infty &= \{a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} | a \text{ est inversible et } a_{ij} - \delta_{ij} = 0 \\ &\quad \text{sauf pour un nombre fini de } a_{ij}\} \\ gl_\infty &= \{a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} | a_{ij} = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } a_{ij}\} \\ \bar{a}_\infty &= \{a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}} | a_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| \text{ est assez grand}\} \end{aligned}$$

Proposition 10 *GL_∞ et gl_∞ agissent sur F par R et r respectivement :*

$$\begin{aligned} r(a)(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots) &= a \cdot \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots + \nu_{i_1} \wedge a \cdot \nu_{i_2} \wedge \ldots + \ldots \\ R(a)(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots) &= a \cdot \nu_{i_1} \wedge a \cdot \nu_{i_2} \wedge \ldots \end{aligned}$$

où $a \cdot \nu_j = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_{ij}\nu_i$. On vérifie que r et R sont reliés par :

$$\exp r(a) = R(\exp a), \quad a \in gl_\infty$$

<u>Remarque</u> : Ces représentations sont bien définies : on a introduit les algèbres de matrices ci-dessus juste pour que cela marche. Par exemple pour r, il n'y aura à sommer qu'un nombre fini de termes, car pour i_k assez petit, on a précisement $a \cdot \nu_{i_k} = 0$ et le terme est nul. D'autre part, pour le calcul d'un des termes, mettons $a \cdot \nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots$, $a \cdot \nu_{i_1}$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de ν_i, et le produit est bien défini. On raisonne de même pour R.

Preuve :

$$\begin{aligned} R(\exp a)(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots) &= \exp a \cdot \nu_{i_1} \wedge \exp a \cdot \nu_{i_2} \wedge \ldots \\ &= \sum_{(n_i)_{i\in\mathbb{N}}} \left(\frac{1}{n_1!} a^{n_1} \cdot \nu_{i_1}\right) \wedge \left(\frac{1}{n_2!} a^{n_2} \cdot \nu_{i_2}\right) \wedge \ldots) \\ &= \sum_{n_1,\ldots n_k} \frac{1}{\prod_{i=1}^k n_i!} (a^{n_1} \cdot \nu_{i_1} \wedge a^{n_2} \cdot \nu_{i_2} \wedge \ldots) \\ (\exp r(a))(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} r(a)^n (\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots) \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1+n_2+\ldots=n} \frac{n!}{\prod_i n_i!} a^{n_1} \cdot \nu_{i_1} \wedge a^{n_2} \cdot \nu_{i_2} \wedge \ldots \right) \\ &= \sum_{n_1,\ldots,n_k} \frac{1}{\prod_i n_i!} (a^{n_1} \cdot \nu_{i_1} \wedge a^{n_2} \cdot \nu_{i_2} \wedge \ldots) \end{aligned}$$

et le résultat. □

Proposition 11 *On note* $A^{i_m,i_{m-1},\dots}_{j_m,j_{m-1},\dots}$ *la matrice obtenue en ne conservant que les intersections des lignes* $i_m, i_{m-1}, \dots$ *et des colonnes* $j_m, j_{m-1}, \dots$ *de la matrice* A*. On a alors :*

$$R_m(A)(\nu_{i_m} \wedge \nu_{i_{m-1}} \wedge \dots) = \sum_{j_m > j_{m-1} > \dots} \left(\det A^{i_m,i_{m-1},\dots}_{j_m,j_{m-1},\dots}\right)(\nu_{j_m} \wedge \nu_{j_{m-1}} \wedge \dots)$$

Preuve : C'est une conséquence du calcul extérieur. □

On a ainsi obtenu pour chacun des $F^{(m)}$ une représentation r_m de gl_∞ sur $F^{(m)}$. Il s'en déduit une représentation r à valeurs dans F. Cette représentation est appelée la représentation extérieure infinie.

On peut définir une forme hermitienne $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur F en se donnant pour base orthonormale les monômes semi-infinis (comme ψ). On note $a^\dagger = {}^t\bar{a}$ la transconjuguée de $a \in gl_\infty$. On vérifie, en regardant l'action sur les E_{kl} :

$$\langle r(a)\phi|\phi'\rangle = \langle\phi|r(a^\dagger)\phi'\rangle$$

Alors la décomposition de F en $F^{(m)}$ est orthogonale, et les r_m sont unitaires.

En particulier, les $E_{kl} \in gl_\infty$ (et qui en forment une base) sont représentés par :

$$r(E_{kl})(\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \dots) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \notin \{i_1, i_2, \dots\} \\ \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_{j-1}} \wedge \nu_l \wedge \nu_{i_{j+1}} \wedge \dots \text{ si } k = i_j \end{cases}$$

Si ν_l est déjà présent dans l'expression, le terme est alors nul.

Proposition 12 *Les* E_{kl} *vérifient* $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$ *donc les* $r(E_{kl})$ *vérifient le même type de relation. De plus* $r(E_{kl})$ *envoie l'espace* $F^{(m)}$ *des états de charge* m *dans lui-même car* $F^{(m)}$ *est engendré par les vecteurs du type* $\phi = \nu_{i_m} \wedge \dots \wedge \nu_{i_{m-k}} \wedge \nu_{m-k-1} \wedge \nu_{m-k-2} \wedge \dots$ *et on a :*

$$\phi = r(E_{i_m,m}) \dots r(E_{i_{m-k},(m-k)})|m\rangle.$$

Ceci prouve que les r_m sont (fortement) irréductibles.

On va maintenant étendre les représentations que l'on a obtenues de gl_∞ et GL_∞ dans F par une représentation de $\bar{a}_\infty$ dans F.

Le problème est que si on essaye d'étendre r, on obtient des singularités :

$$r_m(\text{diag}(\dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots))|m\rangle = \underbrace{(\lambda_m + \lambda_{m-1} + \dots)}_{\text{qui peut diverger}}|m\rangle.$$

On corrige cela en définissant les $\widehat{r}$ par :

$$\widehat{r}(E_{ij}) = \begin{cases} r(E_{ij}) & \text{si } i \neq j \text{ ou } i = j > 0 \\ r_m(E_{ii}) - \text{Id} & \text{si } i = j \leq 0 \end{cases}$$

Dans un cadre fermionique on peut écrire

$$\widehat{r}(E_{ij}) = \begin{cases} \psi_i\psi_j^* & \text{si } i \neq j \text{ ou } i = j > 0 \\ \psi_j^*\psi_i & \text{si } i = j \leq 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\widehat{r}(\mathrm{diag}(\dots,\lambda_k,\lambda_{k+1},\dots))|m\rangle = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)|m\rangle \text{ si } m\geq 1 \\ -\left(\sum_{k=0}^{m+1}\lambda_k\right)|m\rangle \text{ si } m\leq -1 \\ 0 \text{ si } m=0 \end{cases}$$

Mais les $\widehat{r}_m(E_{kl})$ ne vérifient plus les mêmes relations que les E_{kl}. Pour $i\neq l$ et $j\neq k$, on a :

$$\begin{aligned} [\widehat{r}_m(E_{ij}),\widehat{r}_m(E_{kl})] &= 0 \\ [\widehat{r}_m(E_{ij}),\widehat{r}_m(E_{jl})] &= \widehat{r}_m(E_{il}) \\ [\widehat{r}_m(E_{ij}),\widehat{r}_m(E_{ki})] &= -\widehat{r}_m(E_{kj}) \\ [\widehat{r}_m(E_{ij}),\widehat{r}_m(E_{ji})] &= \widehat{r}_m(E_{ii})-\widehat{r}_m(E_{jj})+\alpha(E_{ij},E_{ji})\mathrm{Id} \quad \text{avec} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha(E_{ij},E_{ji}) &= -\alpha(E_{ji},E_{ij})=1 \text{ si } i\leq 0, j\geq 1 \\ \alpha(E_{ij},E_{kl}) &= 0 \quad \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Finalement :

$$[\widehat{r}_m(E_{ij}),\widehat{r}_m(E_{kl})] = \widehat{r}_m([E_{ij},E_{kl}])+\alpha(E_{ij},E_{kl})$$

α est un 2-cocyle, c'est-à-dire une application bilinéaire antisymétrique, qui vérifie la relation de Jacobi.

En étendant $\widehat{r}_m$ à $\bar{a}_\infty$ par linéarité, on obtient une droite de représentation, due à α.

Définition 15 – On pose : $a_\infty = \bar{a}_\infty \oplus \mathbb{C}c$ munie du crochet :

$$[a,b] = ab-ba+\alpha(a,b)c$$

et c commute à a_∞.

On obtient alors une représentation de a_∞ à $F^{(m)}$ en étendant $\widehat{r}_m$ par $\widehat{r}_m(c)=1$. En posant $c^\dagger = c$, les représentations $\widehat{r}_m$ sont unitaires et irréductibles.

On pose : $\Lambda_k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} E_{j,j+k}$

Ce sont les opérateurs de *shift* : $\Lambda_k\nu_i = \nu_{i-k}$, donc ils commutent : $[\Lambda_k,\Lambda_l]=0$. On en déduit que :

$$[\widehat{r}_m(\Lambda_k),\widehat{r}_m(\Lambda_l)] = \alpha(\Lambda_k,\Lambda_l)\mathrm{Id} = n\delta_{n,-k}$$

Dans la vision bosonique, on a donc : $\alpha_k \longrightarrow \widehat{r}_m(\Lambda_k)$.

4 La correspondance bosons-fermions

On se place dans l'espace de Fock $B=\mathbb{C}[x_1,x_2,\dots]$ que l'on a introduit précédemment. Soit $\widehat{B}=\mathbb{C}[[x_1,x_2,\dots]]$ son complété formel (espace des séries formelles). Un opérateur différentiel sur B est un objet de la forme :

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{1\leq i_1\leq\dots\leq i_n} P_{i_1,\dots,i_n}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}$$

où $P_{i_1,\dots,i_n} \in \widehat{B}$. Cela définit un opérateur linéaire $D : B \to \widehat{B}$. On peut montrer que la réciproque est vraie, à savoir que tout opérateur linéaire $D : B \to \widehat{B}$ est différentiel. Notons le cas particulier de la translation de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) : T_\lambda(f)(x_1, x_2, \dots) = f(x_1 + \lambda_1, x_2 + \lambda_2 \dots)$. Alors :

$$T_\lambda = \exp \sum_{n \geq 1} \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Lemme 13 *Soit $D : B \to \widehat{B}$ un opérateur linéaire.*

1. *Si $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $[x_i, D] = \lambda_i D$, alors $D = D(1) \exp\left(-\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$.*
2. *Si $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $[\frac{\partial}{\partial x_i}, D] = \mu_i D$, alors $D(1) = C \exp\left(\sum_i \mu_i x_i\right)$.*
3. *Si les deux conditions précédentes sont réunies, on en déduit immédiatement qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que :*

$$D = C \exp\left(\sum_i \mu_i x_i\right) \exp\left(-\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Preuve : 1. On remplace D par DT_λ. Or on a :

$$[x_i, DT_\lambda] = [x_i, D]T_\lambda - D[x_i, T_\lambda] = (\lambda_i D)T_\lambda - D(\lambda_i T_\lambda) = 0$$

L'assertion est donc équivalente à $[x_i, D] = 0 \Longrightarrow D = D(1)$. Mais on vérifie par récurrence sur le degré de f que $[x_i, D] = 0 \Longrightarrow D(f) = D(1)f$, d'où le résultat.

2. On remplace D par $\exp(-\sum \mu_i x_i)D$. On vérifie :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \exp(-\sum \mu_i x_i)D\right] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \exp(-\sum \mu_i x_i)\right] D - \exp(-\sum \mu_i x_i) \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, D\right] = 0$$

On veut donc montrer $[\frac{\partial}{\partial x_i}, D] = 0 \Longrightarrow D(1) = C$ (constante). Mais $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, D\right] = 0$ spécialisé en 1 implique $\frac{\partial}{\partial x_i}(D(1)) = 0$ pour tout i, et $D(1) = C$. □

4.1 Équivalence des représentations sur B et sur F

On considère les vecteurs de $F^{(m)}$ de la forme :

$$\widehat{r}_m(\Lambda_{-k_s}) \dots \widehat{r}_m(\Lambda_{-k_1})|m\rangle, \quad 0 < k_1 \leq \dots \leq k_s$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants grâce à la proposition 5 . Ceux qui vérifient $\sum_i k_i = k$ appartiennent à $F_k^{(m)}$ et donc en forment une base, puisque la dimension de $F_k^{(m)}$ est exactement $p(k)$. Mais les $\widehat{r}_m(\Lambda_k)$ vérifient les relations de commutation :

$$[\widehat{r}_m(\Lambda_k), \widehat{r}_m(\Lambda_l)] = n\delta_{n,-k}c$$

On a donc obtenu une représentation irréductible de l'algèbre d'Heisenberg $\mathcal{A}$ dans $F^{(m)}$, qui est par conséquent isomorphe à la représentation générique de $\mathcal{A}$ dans B. On a donc un isomorphisme, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:

$$\sigma_m : F^{(m)} \xrightarrow{\sim} B = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$$

que l'on normalise par $\sigma_m|m\rangle = 1$.

On remarque que chacun des isomorphimes $\sigma_m \xrightarrow{\sim} B$ peut aussi se voir en posant $B^{(m)} = q^m\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ où q est la charge et qu'on a donc : $\sigma_m : F^{(m)} \xrightarrow{\sim} B^{(m)}$

On en déduit donc :

Proposition 14 *On pose :*

$$\sigma = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \sigma_m \qquad et$$

$$\widetilde{B} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots; q, q^{-1}]$$

que l'on appelle espace bosonique de Fock.

Alors il existe un isomorphisme $\sigma : F \xrightarrow{\sim} B$

On note que pour la représentation transportée, $\widehat{r}_m^B = \sigma_m \widehat{r}_m \sigma_m^{-1}$, et $k \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{r}_m^B(\Lambda_k) = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \widehat{r}_m^B(\Lambda_{-k}) = kx_k, \quad \widehat{r}_m^B(\Lambda_0) = m = q\frac{\partial}{\partial q}\Big|_{q=m}$$

$$\text{C'est-à-dire :} \qquad \alpha_k \to \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \alpha_{-k} \to kx_k, \quad \alpha_0 \to q\frac{\partial}{\partial q}$$

De plus, on transporte la multiplication par q de $\widetilde{B}$ dans F par un opérateur que l'on note encore q, que l'on définit, pour $m, i \in \mathbb{Z}$, par :

$$q|m\rangle = |m+1\rangle, \quad q\psi_i = \psi_{i+1}q$$

En effet : la première égalité signifie que la multiplication par q augmente la charge 1, ce qui est bien ce que l'on veut vu la normalisation de σ_m. Pour la deuxième égalité, remarquons que $q\alpha_k = \alpha_k q$ (q commute avec les opérations sur les x_k), et que cette relation est bien conservée lorsqu'on définit q tel que nous l'avons fait. De plus, ces relations suffisent à définir correctement q sur tout F.

4.2 Première partie de la correspondance bosons-fermions

Définition 16 – On pose :

$$\Gamma_+(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{z^{-n}}{n}\alpha_n\right), \quad \Gamma_-(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{z^{n}}{n}\alpha_{-n}\right)$$

où les α_n sont les bosons. De plus, on introduit les opérateurs de vertex :

$$\Gamma(z) = \Gamma_-(z)\Gamma_+(z)^{-1}, \quad \Gamma^*(z) = \Gamma_-(z)^{-1}\Gamma_+(z)$$

Du point de vue bosonique, on a :

$$\Gamma_+(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{z^{-n}}{n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \Gamma_-(z) = \exp\left(\sum_{n\geq 1} z^n x_n\right)$$

Théorème 15 – *On a la correspondance :*

$$\begin{aligned}\psi(z) &= z^{\alpha_0} q \Gamma_-(z) \Gamma_+(z)^{-1} \\ \psi^*(z) &= q^{-1} z^{-\alpha_0} \Gamma_-(z)^{-1} \Gamma_+(z)\end{aligned}$$

Remarque : On rappelle que $\alpha_0|_{F^{(m)}} = m\mathrm{Id}$.

Preuve : On note α_k les bosons issus de la bosonisation des ψ_i, ψ_i^*. On vérifie tout d'abord :

$$[\alpha_k, \psi(z)] = \left[\alpha_k, \sum \psi_j z^j\right] = \sum [\alpha_k, \psi_j] z^j = \sum \psi_{j-k} z^j = z^k \psi(z)$$

$$\text{et de même} \quad [\alpha_k, \psi^*(z)] = -z^k \psi^*(z)$$

Dans $\widetilde{B}$, la première relation donne :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \sigma\psi(z)\sigma^{-1}\right] = z^k \sigma\psi(z)\sigma^{-1}, \quad [x_k, \sigma\psi(z)\sigma^{-1}] = \frac{z^{-k}}{k} \sigma\psi(z)\sigma^{-1}$$

Alors, d'après le lemme du début de la section, $\sigma\psi(z)\sigma^{-1} : B^{(m)} \longrightarrow B^{(m+1)}$ est de la forme :

$$\sigma\psi(z)\sigma^{-1} = C_m(z) q \Gamma(z)$$

(On a $\sigma\psi(z)\sigma^{-1} : B^{(m)} \longrightarrow B^{(m+1)}$ car on a affaire à une somme de ψ_j ce qui, appliqué à un monôme semi-infini, change l'indexation de 1, et donc augmente de 1 la charge). Mais le coefficient de $|m+1\rangle$ dans $\psi(z)|m\rangle$ vaut z^{m+1} , donc $C_m(z) = z^{m+1}$ □

4.3 Deuxième partie de la correspondance bosons-fermions

Définition 17 – Les polynômes de Schur élémentaires $S_k(x)$ (on note $x = (x_1, x_2, \dots)$) sont les polynômes de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ définis par la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} S_k(x) z^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k\right)$$

Ils s'écrivent donc pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$S_k(x) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots=k} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \frac{x_2^{k_2}}{k_2!} \dots, \quad S_{-k}(x) = 0, \quad S_0(x) = 1$$

On appelle *Par* (pour partitions) l'ensemble des suites décroissantes d'entiers strictement positifs. Soit donc $\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k > 0\} \in Par$. Alors on définit le polynôme de Schur S_λ par :

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k} &= \det\left(S_{\lambda_i+j-i}(x)\right)_{i,j\in[1,k]} \\ &= \begin{vmatrix} S_{\lambda_1}(x) & S_{\lambda_1+1}(x) & S_{\lambda_1+2}(x) & \ldots\ldots \\ S_{\lambda_2-1}(x) & S_{\lambda_2}(x) & S_{\lambda_2+1}(x) & \ldots\ldots \\ S_{\lambda_3-2}(x) & S_{\lambda_3-1}(x) & S_{\lambda_3}(x) & \ldots\ldots \\ \vdots & \vdots & & \\ S_{\lambda_i-i+1}(x) & S_{\lambda_i-i+2}(x) & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ S_{\lambda_k-k+1}(x) & S_{\lambda_k-k+2}(x) & S_{\lambda_k-k+3}(x) & \ldots\ldots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Avant d'énoncer le théorème essentiel de cette partie, définissons quelques objets que nous utiliserons lors de la démonstration. Soit donc :

$$\overline{GL}_\infty = \{a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}/a \text{ est inversible et les } a_{ij} - \delta_{ij} \text{ avec } i \geq j \text{ sont presque tous nuls}\}$$

$$\overline{gl}_\infty = \{a = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}/ \text{ les } a_{ij} \text{ avec } i \geq j \text{ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux}\}$$

$\overline{GL}_\infty$ et $\overline{gl}_\infty$ n'agissent pas sur V, mais sur l'un de ses complétés $\bar{V}$:

$$\overline{V} = \left\{ \sum_j c_j\nu_j/c_j = 0 \text{ si } j \text{ est assez grand} \right\}$$

On voit que les représentations R et r s'étendent à des représentations de $\overline{GL}_\infty$ et $\overline{gl}_\infty$ sur le même espace F et qu'en particulier, on conserve la relation :

$$\exp r(a) = R(\exp a), \qquad \text{pour } a \in \overline{gl}_\infty$$

On est à présent en mesure d'énoncer le :

Théorème 16 – $\sigma_m(\nu_{i_m} \wedge \nu_{i_{m-1}} \wedge \dots) = S_{i_m - m, i_{m-1}-(m-1),\dots}(x)$

Preuve : Nous allons faire la démonstration dans le cas $m = 0$, en calculant :

$$\sigma_0 \left(R_0(\exp(y_1\Lambda_1 + y_2\Lambda_2 + \dots)(\nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \dots)\right) = R_0^B \left(\exp(y_1\Lambda_1 + y_2\Lambda_2 + \dots)\right) P(x)$$

où $P(x) = \sigma_0(\nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \dots)$.

Si $a = (y_1\Lambda_1 + y_2\Lambda_2 + \dots)$, alors $a \in \overline{gl}_\infty$ et $\exp a \in \overline{GL}_\infty$. Tout d'abord, en représentation bosonique :

$$R_0^B \left(\exp(y_1\Lambda_1 + y_2\Lambda_2 + \dots)\right) = \exp\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots\right)$$

On note $y = (y_1, y_2, \dots)$. Soit $F(y)$ le coefficient de 1 quand on applique cet opérateur à $P(x)$. Alors :

$$\begin{aligned} F(y) &= \left.\exp\left(\sum_{j\geq 1} y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) P(x)\right|_{x=0} \\ &= P(x+y)|_{x=0} = P(y) \end{aligned}$$

Mais $\exp\left(\sum_{j\geq 1}\Lambda_j y_j\right) = \exp\left(\sum_{j\geq 1}\Lambda_1^j y_j\right) = \sum_{k\geq 0}\Lambda_k S_k(y)$ par définition. On regarde cette expression comme une matrice A ayant pour coefficients : $A_{ij} = S_{j-i}(y)$

On a $A \in \overline{GL}_\infty$, et le calcul extérieur est toujours valable, donc $\sigma_0(\nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \dots)$ est le coefficient de $|0\rangle$ dans l'expression $\sigma_0\left(R(A)(\nu_{i_0} \wedge \nu_{i_{-1}} \wedge \dots)\right)$. Une formule de la troisième section nous donne alors que cela vaut :

$$\det\left(A_{0,-1,\dots}^{i_0,i_{-1},\dots}\right)$$

On voit alors que ce coefficient n'est autre que $S_{i_0,i_{-1}+1,i_{-2}+2,\dots}(y)$. On a donc :

$$F(y) = S_{i_0,i_{-1}+1,i_{-2}+2,\dots}(y) = P(y)$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

5 Application : la formule du triple produit de Jacobi

Il faut redéfinir l'énergie car les calculs se font mieux qu'avec le degré usuel. On note donc H l'opérateur d'énergie où l'énergie est définie (contrairement au paragraphe précédent) pour le monôme semi-infini $\nu_{i_1} \wedge \nu_{i_2} \wedge \ldots$ comme la somme des $j > 0$ qui apparaissent dans $\{i_1, i_2, \ldots\}$ moins celle des $j \leq 0$ qui n'apparaissent pas. Pour un monôme de charge m, cette définition diffère du degré usuel (qui différenciait $j > m$ et $j \leq m$) de $m(m+1)/2$.

On considère aussi α_0 l'opérateur de charge défini précédemment, en se souvenant que $\alpha_0|_{F^{(m)}} = mI$. On a déjà calculé plus haut :

$$\mathrm{Tr}_{F^{(m)}} q^H = \dim_q F^{(m)} = q^{\frac{m(m+1)}{2}} \varphi(q)^{-1}$$

On va maintenant calculer $\mathrm{Tr}_F q^H z^{\alpha_0}$.

On commence par calculer par une première méthode. On dispose d'une base évidente formée des éléments de la forme :

$$\psi_{i_k} \ldots \psi_{i_1} \psi^*_{j_1} \ldots \psi^*_{j_l} |0\rangle$$

où $i_k > \ldots > i_1 > 0 \geq j_1 > \ldots > j_l$.

Pour dire autrement les choses, on part de $|0\rangle$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on ajoute éventuellement ψ^*_{-n} et/ou ψ_{n+1}. L'ordre dans lequel on applique ces opérateurs n'a pas d'importance sur le résultat final (au signe près). ψ_{n+1} augmente la charge de 1 et l'énergie de n, donc contribue à hauteur de zq^n. ψ^*_{-n} diminue la charge de 1 et l'énergie de n, donc contribue pour $z^{-1}q^{-n}$. D'où la première formule, que l'on obtient en raisonnant comme pour le calcul de $\dim_q B = 1/\varphi(q)$:

$$\mathrm{Tr}_F q^H z^{\alpha_0} = \prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + zq^n)(1 + z^{-1}q^{n-1})$$

Il y a maintenant une autre façon de faire ce calcul. On décompose d'abord $F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)}$ puis sur chacun de ces facteurs la q-dimension est déjà calculée. On a alors :

$$\mathrm{Tr}_F q^H z^{\alpha_0} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}} / \varphi(q)$$

On a ainsi démontré la formule du triple produit de Jacobi

$$\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)(1 - zq^n)(1 - z^{-1}q^{n-1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j q^{\frac{j(j+1)}{2}}.$$

En remplaçant q par q^2 puis z par $q^{-1}z$, on peut lui donner la forme suivante

$$\prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 - zq^{2n-1})(1 - z^{-1}q^{2n-1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j q^{j^2},$$

ou encore avec $z = u/v$ et $q = uv$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u^n v^n)(1 - u^{n-1} v^n)(1 - u^n v^{n-1}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m u^{m(m-1)/2} v^{m(m+1)/2}$$

Deuxième partie : Super-bosons et super-fermions

1 Super-algèbre de Clifford

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère l'algèbre tensorielle $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes^n}$. On construit alors la super-algèbre A_{su} associée ($\mathbb{Z}$-graduée) en munissant A du produit :

$$\begin{array}{rcl} \otimes_{su} : V^{\otimes^n} \times V^{\otimes^m} & \to & V^{\otimes^{n+m}} \\ (a,b) & \mapsto & a \otimes_{su} b = (-1)^{mn} \cdot a \otimes b \end{array}$$

Ceci est la construction générique d'une super-algèbre sur $\mathbb{K}$ dont on dit qu'elle a pour générateurs les éléments d'une base de V.

On construit maintenant, *mutatis mutandis*, une super-algèbre de Clifford en quotientant comme pour une algèbre de Clifford usuelle.

Définition 18 – Une super-algèbre de Clifford $Cl = Cl_0 \oplus Cl_1$ est une super-algèbre associative sur $\mathbb{C}$ avec élément unité sur les générateurs ψ_i et ψ_i^*, appelés super-fermions libres, avec les relations suivantes, pour tout i, $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \psi_i \psi_j^* + (-1)^{4ij} \psi_j^* \psi_i & = & \delta_{ij} \\ \psi_i \psi_j + (-1)^{4ij} \psi_j \psi_i & = & 0 \\ \psi_i^* \psi_j^* + (-1)^{4ij} \psi_j^* \psi_i^* & = & 0 \end{array}$$

ainsi que la $\mathbb{Z}_2$-graduation :

$$\begin{array}{rcl} j \in \mathbb{Z} & \Rightarrow & \psi_j, \psi_j^* \in Cl_0 \\ j \in \mathbb{Z} + \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & \psi_j, \psi_j^* \in Cl_1 \end{array}$$

On munit de plus Cl d'une anti-involution anti-linéaire ω :

$$\omega(\psi_j) = (-1)^{2j} \psi_j^*, \quad \omega(\psi_j^*) = (-1)^{2j} \psi_j$$

Ceci définit la super-algèbre de Clifford sur les générateurs ψ_i et ψ_i^*.

Remarque : Cette construction reprend pas à pas celle de l'algèbre de Clifford, à ceci près que pour cette dernière, le produit tensoriel usuel est utilisé, et que les relations vérifiées par les fermions libres ne contiennent pas les facteurs $(-1)^{4ij}$ et sont indexés par $\mathbb{Z}$. Cette remarque est générale dans le sens où la plupart des objets des super-algèbres sont similaires à ceux des algèbres ordinaires hormis le facteur $(-1)^{4ij}$. On retrouve l'anti-involution ω dans les algèbres de Clifford en tant qu'involution semi-linéaire. En fait elle représente l'équivalent de l'adjonction dans la cadre de la mécanique quantique, et il ne faut pas oublier que les algèbres de Clifford modélisent les états électroniques.

On a encore la notion de module de spin.

Définition 19 – On appelle *module de spin* sur Cl le Cl-module irréductible V qui admet un vecteur non-nul $|0\rangle$, appelé le vecteur vide, satisfaisant :

$$\begin{aligned} \psi_j|0\rangle &= 0 \quad \text{pour} \quad j \leq 0 \\ \psi_j^*|0\rangle &= 0 \quad \text{pour} \quad j > 0 \end{aligned}$$

On peut de même construire V en choisissant un vecteur $|0\rangle$ et en considérant l'espace vectoriel engendré par la base formelle des vecteurs de la forme :

$$\psi_{i_s}^{*^{l_s}} \dots \psi_{i_1}^{*^{l_1}} \psi_{j_r}^{k_r} \dots \psi_{j_1}^{k_1}|0\rangle$$

$$\text{avec } j_r > \dots > j_1 > 0 \geq i_1 > \dots > i_s$$

et tels que $l_t = 1$ [resp. $k_t = 1$] si $i_t \in \mathbb{Z}$ [resp. $j_t \in \mathbb{Z}$] .

On définit aussi une forme hermitienne $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur V en demandant que les éléments de la forme précédente soient deux à deux orthogonaux, de norme

$$(-1)^{2\sum_t l_t i_t} k_1! \dots k_r! \, l_1! \dots l_s!$$

(et donc $|0\rangle$ est normé).

Ainsi, V n'est pas unitaire, les fantômes étants les éléments de la forme précédente avec un nombre impair de ψ_i^* avec $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

2 Définition intrinsèque des super-bosons et fermions

2.1 $gl_{\infty|\infty}$ et $a_{\infty|\infty}$

Soit $\Psi = \Psi_{\bar{0}} \oplus \Psi_{\bar{1}} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_j$ un espace vectoriel complexe $\mathbb{Z}_2$-gradué avec $\psi_i \in \Psi_{\bar{0}}$ si $i \in \mathbb{Z}$ et $\psi_i \in \Psi_{\bar{1}}$ sinon. On introduit la superalgèbre de Lie des matrices complexes infinies :

$$gl_{\infty|\infty} = gl_{\infty|\infty;\bar{0}} \oplus gl_{\infty|\infty;\bar{1}}$$

où pour $\alpha \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$:

$$\begin{aligned} gl_{\infty|\infty;\alpha} \quad = \quad & \{(a_{ij})_{i,j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} | a_{ij} = 0 \text{ si } 2(i+j) = \alpha + 1 \mod 2 \\ & \qquad \text{et les } a_{ij} \text{ sont presques tous nuls}\} \end{aligned}$$

Le crochet de Lie est défini comme suit :

$$[a,b] = ab - (-1)^{\alpha\beta} ba \quad \text{pour} \quad a \in gl_{\infty|\infty;\alpha}, b \in gl_{\infty|\infty;\beta}$$

L'action de $gl_{\infty|\infty}$ sur Ψ est évidente. Elle peut aussi s'exprimer à l'aide des générateurs de Clifford :

$$E_{ij} \to (-1)^{2j} \psi_i \psi_j^*$$

où l'action est définie par le commutateur :

$$E_{ij}\psi_j = \left[(-1)^{2j}\psi_i\psi_j^*, \psi_j\right] = \psi_i$$

On définit une représentation π de $gl_{\infty|\infty}$ sur V par :

$$\pi(E_{ij}) = (-1)^{2j}\psi_i\psi_j^*$$

C'est-à-dire que $\pi(E_{ij})(\psi|0\rangle) = (-1)^{2j}\psi_i\psi_j^*\psi|0\rangle$.
On définit le vecteur de charge par :

$$|m\rangle = \begin{cases} \psi_{\frac{1}{2}}^m|0\rangle & \text{pour } m \geq 0 \\ \psi_{-\frac{1}{2}}^{*-m-1}\psi_0^*|0\rangle & \text{pour } m < 0 \end{cases}$$

Si on pose $\deg|0\rangle = 0$, $\deg\psi_i = 1$ et $\deg\psi_i^* = -1$, on obtient une graduation : $V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_m$ telle que $|m\rangle \in V_m$. On appelle m le nombre de charge.

Il existe d'autres décompositions de V. Si on pose $\deg|0\rangle = 0$ et $\deg\psi_i = -\deg\psi_i^* = 1$ si $i \in \mathbb{Z}$ et 0 sinon, on obtient la décomposition fermionique : $V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_{(f);m}$. De même si on pose $\deg\psi_i = -\deg\psi_i^* = 1$ si $i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ et 0 sinon, on obtient la décomposition bosonique : $V = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V_{(b);m}$. Dans ces cas le nombre m est appelé nombre de charge fermionique (respectivement bosonique).

On va maintenant étudier l'extension suivante :

$$\bar{a}_{\infty|\infty} = \{(a_{ij})_{i,j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} | \text{ Pour tout } k \text{ le nombre de } (a_{ij}) \text{ non nuls avec } j \leq k,\, i \geq k \text{ est fini}\}$$

Cette superalgèbre de Lie agit sur l'espace :

$$\overline{\Psi} = \left\{\sum c_j\psi_j | c_j = 0 \text{ pour assez grand}\right\}$$

Pour les mêmes raisons de convergence que dans la première partie de l'exposé, on doit modifier légèrement la représentation π pour la prolonger. On pose donc :

$$\begin{array}{ll} \widehat{\pi}(E_{ii}) = \pi(E_{ii}) - (-1)2iI & \text{pour } i \leq 0 \\ \widehat{\pi}(E_{ij}) = \pi(E_{ij}) & \text{si } i \neq j \text{ ou } i > 0 \end{array}$$

On remarque que la première formule signifie simplement que les matrices diagonales annulent le vecteur vide. On introduit l'extension centrale $a_{\infty|\infty} = \bar{a}_{\infty|\infty} \oplus \mathbb{C}c$ munie du crochet :

$$[a, b] = ab - (-1)^{\alpha\beta}ba + C(a, b)c \text{ pour } a \in \bar{a}_{\infty|\infty;\alpha} \text{ et } b \in \bar{a}_{\infty|\infty;\beta}$$

où le cocycle C[1] est défini par :

$$\begin{cases} C(E_{ij}, E_{ji}) = -(-1)^{2(i+j)}C(E_{ji}, E_{ij}) = (-1)^{2i} & \text{si } i \leq 0 < j \\ C(E_{ij}, E_{kl}) = 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Si on étend $\widehat{\pi}$ à $a_{\infty|\infty}$ par $\widehat{\pi}(c) = I$, on obtient une représentation linéaire de $a_{\infty|\infty}$ sur chaque V_m. On obtient la graduation principale $gl_{\infty|\infty} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} g_j$ en posant $\deg E_{ij} = 2(j - i)$, de sorte que $[g_i, g_j] = g_{i+j}$.

Ceci s'étend à $a_{\infty|\infty}$ en posant $\deg c = 0$ et induit la graduation principale :

$$V_m = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V_m^{(k)}$$

[1]Un 2-cocycle est une application bilinéaire C qui vérifie la propriété d'antisymétrie et la relation de Jacobi modifiée pour les super-algèbres, ce qui permet précisément de définir l'extension centrale.

2.2 Définition des superbosons

On construit une sous-superalgèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $a_{\infty|\infty}$ pour laquelle les espaces V_m vus comme $\tilde{\mathfrak{g}}$-modules restent irréductibles. Posons :

$$\begin{array}{rclcrcl} \lambda(n) & = & \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{k,k+n} & \quad & \mu(n) & = & \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} E_{k,k+n} \\ e(n) & = & \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{k-\frac{1}{2},k+n} & & f(n) & = & \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{k,k+n-\frac{1}{2}} \end{array}$$

Ces éléments forment avec l'élément central c une base de la sous-superalgèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ de $a_{\infty|\infty}$. Les crochets suivants se calculent facilement :

$$\begin{array}{rclcrcl} [\lambda(n), e(m)] & = & -e(m+n) & \quad & [\lambda(n), f(m)] & = & f(m+n) \\ [\mu(n), e(m)] & = & e(m+n) & & [\mu(n), f(m)] & = & -f(m+n) \\ [\lambda(n), \lambda(m)] & = & n\delta_{m,-n}c & & [\mu(n), \mu(m)] & = & -n\delta_{m,-n} \end{array}$$

$$[\lambda(n), \mu(m)] = 0 \quad [e(n), f(m)] = \lambda(m+n) + \mu(m+n) - n\delta_{m,-n}c$$

L'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sera appelée sous-algèbre principale de $a_{\infty|\infty}$.

On peut maintenant donner une autre construction de cette algèbre. Soit $\mathfrak{L} = \mathbb{C}\left[t, t^{-1}\right]$ l'algèbre des polynômes de Laurent en l'indéterminée t. Soit

$$gl_{1|1}(\mathfrak{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathfrak{L} \right\}$$

la superalgèbre de Lie munie de la $\mathbb{Z}_2$-graduation :

$$gl_{1|1;\bar{0}}(\mathfrak{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\} \qquad gl_{1|1;\bar{1}}(\mathfrak{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et du supercrochet de Lie :

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right]^0 = \begin{pmatrix} a\alpha - \alpha a + b\gamma + \beta c & b\delta - \beta d + a\beta - \alpha b \\ c\alpha - \gamma a + d\gamma - \delta c & d\delta - \delta d + c\beta + \gamma b \end{pmatrix}$$

La superalgèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est une extension centrale de $gl_{1|1}(\mathfrak{L})$ par un centre de dimension 1 $\mathbb{C}c$. Le crochet de Lie est donné par :

$$[x + \lambda c, y + \mu c] = [x, y]^0 + \mathrm{Res}_{t=0}\mathrm{Str}(\frac{dx}{dt}y)c$$

pour $x, y \in gl_{1|1}(\mathfrak{L})$. La supertrace Str est ici définie par $\mathrm{Str}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - d$.

Les deux constructions s'identifient par $c = 1$ et les relations suivantes :

$$\begin{array}{rclcrcl} e(n) & = & \begin{bmatrix} 0 & t^n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \quad & f(n) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -t^n & 0 \end{bmatrix} \\ \mu(n) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t^n \end{bmatrix} & & \lambda(n) & = & \begin{bmatrix} -t^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pour simplifier les calculs on élargit souvent l'algèbre par une dérivation paire d qui agit comme $t\frac{d}{dt}$ et annule c.

$$\hat{g}l_{1|1} = gl_{1|1}(\mathfrak{L}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

$$[d, x] = t\frac{dx}{dt} \text{ pour } x \in gl_{1|1}(\mathfrak{L}), \quad [d, c] = 0$$

3 La super-correspondance bosons-fermions

3.1 Champs bosonique et fermionique

On introduit pour simplifier l'ordre normal suivant :

$$: \psi_i \psi_j^* := \begin{cases} \psi_i \psi_j^* & \text{pour} \quad j > 0 \\ -(-1)^{4ij} \psi_j^* \psi_i & \text{pour} \quad j \leq 0 \end{cases}$$

On peut alors décrire les éléments $\lambda(n), \mu(n), e(n), f(n)$ avec les $\psi_i, \psi_i^* \in Cl$:

$$\lambda(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_k \psi_{k+n}^* : \qquad \mu(n) = - \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} : \psi_k \psi_{k+n}^* :$$
$$e(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_{k-\frac{1}{2}} \psi_{k+n}^* : \qquad f(n) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} : \psi_k \psi_{k+n-\frac{1}{2}}^* :$$

De même on a le champ fermionique donné par les séries génératrices suivantes :

$$\psi_0(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i z^i, \qquad \psi_0^*(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \psi_i z^{-i}$$
$$\psi_1(z) = \sum_{i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \psi_i z^i, \qquad \psi_1^*(z) = \sum_{i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}} \psi_i z^{-i}$$

On note P_m la projection sur l'espace $V_{(f);m}$ de la décomposition fermionique, et on introduit les séries génératrices associées :

$$P(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P_m z^m, \quad P(z)^{-1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} P_m z^{-m}$$

On définit aussi la charge q comme l'unique application $q : V_{(f);m} \to V_{(f);m+1}$ telle que :

$$\begin{aligned} q|0\rangle &= \psi_1|0\rangle \\ q\psi_i = \psi_{i+1} q, \qquad & q\psi_i^* = \psi_{i+1}^* q \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z} \\ q\psi_i = -\psi_{i+1} q, \qquad & q\psi_i^* = -\psi_{i+1}^* q \quad \text{pour } i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On définit enfin les séries en z :

$$\Gamma_-(z) = \exp\left(\sum_{n>0} \lambda(-n) \frac{z^n}{n} \right), \quad \Gamma_+(z) = \exp\left(- \sum_{n>0} \lambda(n) \frac{z^{-n}}{n} \right)$$

dont le produit $\Gamma(z) = \Gamma_-(z)\Gamma_+(z)$ donne (comme usuellement) l'opérateur vertex.

3.2 Calculs préliminaires

Le lemme technique qui suit sera utilisé lors des calculs de la section suivante. Les démonstrations se font en calculant directement les relations à l'aide des règles de calcul des définitions.

Lemme 17 $\psi_1(z) = [e(0), \psi_0(z)]z^{-\frac{1}{2}}, \quad \psi_1^*(z) = -[f(0), \psi_0^*(z)]z^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{lclcl} e(n)P(z) & = & zP(z)e(n), & f(n)P(z)^{-1} & = & zP(z)^{-1}f(n) \\ qe(n) & = & -e(n+1)q, & q^{-1}f(n) & = & -f(n+1)q^{-1} \end{array}$$

Notons tout d'abord que la correspondance bosons-fermions nous donne immédiatement :

$$\psi_0(z) = P(z)q\Gamma_-(z)\Gamma_+(z), \quad \psi_0^*(z) = q^{-1}P(z)^{-1}\Gamma_-(z)^{-1}\Gamma_+(z)^{-1}$$

Lemme 18 *On a les égalités formelles :*

$$\begin{aligned} \Gamma_-(z)^{-1}e(m)\Gamma_-(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} e(m-i)z^i \\ \Gamma_+(z)e(m)\Gamma_-(z)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} e(m+i)z^i \\ \Gamma_+(z)^{-1}f(m)\Gamma_+(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} f(m+i)z^{-i} \\ \Gamma_-(z)^{-1}f(m)\Gamma_-(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} f(m-i)z^i \end{aligned}$$

Preuve : On utilise dans la preuve les logarithmes et les exponentielles en tant que leur série formelle respective, et on ne fera la preuve que pour les identités contenant Γ_-, les autres s'obtenant de manière similaire. On définit les polynômes $q_n(\vec{x})$ en la variable $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots)$ par :

$$\exp\left(\sum_{n>0} x_n \frac{z^{-n}}{n}\right) = \sum_n q_n(\vec{x})z^{-n}$$

On pose $y(m) = t^m \otimes y$ pour le calcul qui suit, où t est une indéterminée, et $y = e$ ou f. On calcule :

$$[\lambda(n), y(m)] = (-1)^{\delta} y(m+n)$$

où $\delta = 0$ si $y = f$ et $\delta = 1$ si $y = e$.

Remarquons qu'on a l'égalité formelle, pour $q(z)$ série formelle en z :

$$\exp(q(z))a\exp(-q(z)) = \exp(\operatorname{ad} q(z))a$$

Soient enfin $\epsilon \in 0, 1$, $\vec{\lambda} = (\lambda(1), \lambda(2), \dots$ et $\vec{1} = (1, 1, \dots)$. On calcule donc :

$$
\begin{aligned}
\exp\left((-1)^\epsilon \sum_{n>0} \mathrm{ad}\, \lambda(n) \frac{z^{-n}}{n}\right) y(m) &= \sum_n q_n((-1)^\epsilon \mathrm{ad}\, \vec{\lambda}) y(m) z^{-n} \quad \text{(le calcul est formel)} \\
&= \sum_n q_n((-1)^{\epsilon+\delta} \vec{1}) y(m+n) z^{-n} \\
&= t^m \cdot \sum_n q_n((-1)^{\epsilon+\delta} \vec{1}) \left(\frac{z}{t}\right)^{-n} \otimes y \\
&= t^m \cdot \left(\exp\left((-1)^{\epsilon+\delta} \sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{t}{z}\right)^n\right)\right) \otimes y \\
&= t^m \cdot \left(\exp\left((-1)^{\epsilon+\delta} \ln\left(\frac{1}{1-t/z}\right)^n\right)\right) \otimes y
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases} t^m \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^n \otimes y = \sum_{n=0}^{\infty} y(m+n) z^{-n} & \text{si } \epsilon + \delta \text{ est pair} \\ t^m \left(1 - \dfrac{t}{z}\right) \otimes y = y(m) - y(m+1) z^{-1} & \text{si } \epsilon + \delta \text{ est impair} \end{cases}
$$

□

Remarque : On a démontré en plus dans la preuve des résultats sur d'autres produits que ceux du lemmes, mais de toute manière, on ne les utilisera pas par la suite. On pourra d'ailleurs trouver dans [5] une liste importante des relations de commutation mettant en jeux les divers champs que l'on a introduit précédemment

3.3 La super-correspondance bosons-fermions

On calcule grâce aux lemmes précédents :

$$
\begin{aligned}
\psi_1(z) &= [e(0), \psi_0(z)] z^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(e(0) P(z) q \Gamma_-(z) \Gamma_+(z) - P(z) q \Gamma_-(z) \Gamma_+(z) e(0)\right) z^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(-P(z) q e(-1) \Gamma_-(z) \Gamma_+(z) z - P(z) q \Gamma_-(z) \Gamma_+(z) e(0)\right) z^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left(-P(z) q \Gamma_-(z) \sum_{i=0}^{\infty} e(-1-i) z^{i+1} \Gamma_+(z) - P(z) q \Gamma_-(z) \sum_{i=0}^{\infty} e(i) z^{-i} \Gamma_+(z)\right) z^{-\frac{1}{2}} \\
&= -P(z) q \Gamma_-(z) \sum_{i=0}^{\infty} e(i) z^{-i-\frac{1}{2}} \Gamma_+(z)
\end{aligned}
$$

Le même calcul prévaut pour $\psi_1^*(z)$. On pose donc :

$$
e(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} e(i) z^{-i-\frac{1}{2}}, \quad f(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i) z^{-i+\frac{1}{2}}
$$

Ce qui permet démontrer le résultat suivant :

Théorème 19 – **[La super-correspondance bosons-fermions]**

$$
\begin{aligned}
\psi_0(z) &= P(z) q \Gamma_-(z) \Gamma_+(z), & \psi_0^*(z) &= q^{-1} P(z)^{-1} \Gamma_-(z^{-1}) \Gamma_+(z)^{-1} \\
\psi_1(z) &= -P(z) q \Gamma_-(z) e(z) \Gamma_+(z), & \psi_1^*(z) &= q^{-1} P(z)^{-1} \Gamma_-(z^{-1}) f(z) \Gamma_+(z)^{-1}
\end{aligned}
$$

4 Quelques applications

Nous allons maintenant citer quelques applications de cette théorie à l'arithmétique. Un sujet classique et très étudié est l'écriture d'un entier comme somme de carrés. Fermat a prouvé en 1641 qu'un nombre premier impair pouvait être écrit comme somme de deux carrés si et seulement s' il était congru à 1 modulo 4. Legendre et Gauss ont donné des formules explicites du nombre d'écritures d'un entier comme somme de deux carrés. Lagrange prouva lui que tout nombre pouvait s'écrire comme somme de quatre carrés.

Une approche totalement différente fut proposée par Jacobi en 1829 utilisant les fonctions elliptiques. Introduisons la série suivante :

$$\square(q) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{j^2}$$

Il est alors assez évident que le coefficient de q^k dans la série $\square(q)^d$ est le nombre de façons d'écrire k comme somme de d carrés(en prenant en compte l'ordre des termes). Jacobi a découvert les identités suivantes qui résolvent le problème dans les cas $d = 2, 4, 6, 8$:

$$\begin{aligned}
\square(q)^2 &= 1 + 4\sum_{j,k=1}^{\infty} (-1)^k q^{j(2k-1)},\\
\square(q)^4 &= 1 + 8\sum_{\substack{j,k=1\\ 4\nmid k}}^{\infty} k q^{jk},\\
\square(q)^6 &= 1 - 4\sum_{\substack{j,k=1\\ j>k,\, j-k \text{ impair}}}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(j-1)(k+1)}(j^2-k^2)q^{\frac{1}{2}jk},\\
\square(q)^8 &= 1 + 16\sum_{j,k=1}^{\infty} (-1)^{(j+1)k} k^3 q^{jk}.
\end{aligned}$$

D'autres formules ont été découvertes grâce à la théorie des formes modulaires, notamment pour les entiers impairs inférieurs à 7. Mais les résultats les plus spectaculaires ont été (ré)obtenus simplement gràce à la théorie des algèbres de Lie, et notamment la correspondance boson-fermion et les systèmes de racines. On dispose de l'identité bien connue de Gauss :

$$\square(-q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n}$$

Il s'agit alors de développer la puissance d-ième de ce produit, ce qui apparaît naturellement comme le quotient d'un dénominateur affine par un dénominateur de Weyl. On peut ainsi montrer que le nombre de façons d'écrire n comme somme de quatre carrés est : $8\sum_{k|n,\, 4\nmid k} k$.

On cherche toujours à retrouver par ces techniques le célèbre résultat de Liouville selon lequel pour k impair le nombre de façons d'écrire $2k$ comme somme de 12 carrés est : $264\sum_{j|k} j^5$.

On peut de même s'intéresser aux sommes de nombres triangulaires[2] grâce à la formule :

$$\Delta(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{k\geq 1} \frac{1-q^{2k}}{1-q^{2k-1}}$$

Un exemple de résultat est le nombre de manières d'écrire n comme somme de 16 nombres triangulaires qui vaut :

$$\frac{1}{3\cdot 4^3} \sum_{\substack{a,b,r,s\in\mathbb{N} \text{ impairs} \\ a>b \\ ar+bs=2n+4}} ab(a^2-b^2)^2$$

Dans l'esprit du triple produit, on peut aussi obtenir :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1-uvq^{n-1})(1-u^{-1}v^{-1}q^n)}{(1-uq^{n-1})(1-u^{-1}q^n)(1-vq^{n-1})(1-v^{-1}q^n)} = \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} - \sum_{m,n=-1}^{-\infty}\right) u^m v^n q^{mn}.$$

Conclusion

On a étudié quelques propriétés des algèbres de Clifford et de leurs représentations. Dans le cadre classique, on a pu obtenir deux représentations irréductibles et isomorphes, et en travaillant soit dans l'une, soit dans l'autre, on a pu obtenir des résultats très intéressants sans faire trop de calculs.

Dans le cadre des superalgèbres, cela n'a pas été possible. L'étude des relations de commutation a donc été plus directe, mais aussi plus laborieuse. Néanmoins on a réussi à retrouver le résultat central du cas classique, à savoir la (super-)correspondance.

La difficulté de trouver des représentations agréables des super-algèbres tient probablement à ce qu'on ne connaît pas les systèmes physiques qu'elles décrivent. Ainsi, il est possible d'obtenir des relations appelées KP-hiérarchie, qui sont très fructueuses dans le cas classique, mais qu'on ne sait pas interpréter (pour l'instant) dans le cadre des super-algèbres.

Références

[1] N. Bourbaki : *Eléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie I*, Fascicule XXVI, Hermann, 1960.

[2] N. Bourbaki : *Eléments de mathématique, Algèbre commutative*, Fascicule XVIII, Hermann, 1961.

[3] V. G. Kac : *Infinite dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press, 1990.

[4] V. G. Kac & J. W. Van de Leur : *Super Boson-Fermion Correspondence*, Ann. Inst. Fourier 37, 1987, p. 99-137.

[5] V. G. Kac & A. K. Raina : *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, World Scientific, 1987.

[6] V. G. Kac : *Vertex Algebras for Beginners*, American Mathematical Society, 1997.

[7] J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Guillemin & V. G. Kac : *Lie Theory and Geometry*, Birkhäuser, 1994.

[2] les nombres triangulaires sont les $n(n+1)/2$ où $n \geq 0$