

## 5. Applications de la théorie de la persistance en géométrie

La théorie de la persistance a infiltré depuis quelques années le domaine de la géométrie (au sens large). Il est remarquable qu’une théorie a priori développée pour les applications, se retrouve finalement être très utile dans un domaine des maths fondamentales.

Certaines idées de la persistance étaient utilisées depuis longtemps dans un sous-domaine appelé *géométrie symplectique*, suite aux travaux de mathématiciens comme Barannikov (1994), Viterbo (1992), Usher (2011), mais le langage des modules de persistance et des codes-barres y a été introduit par Polterovich and Shelukhin (2016), rapidement suivis par de nombreux autres travaux.

Dans la partie 5.1, nous donnerons un aperçu de quelques utilisations des codes-barres en géométrie symplectique, en nous restreignant aux applications qui préservent l’aire pour simplifier. Dans la partie 5.2, nous discuterons un travail très récent traitant d’un sujet différent : l’étude topologique des fonctions propres de l’opérateur laplacien.

Il s’agit d’un chapitre de survol qui ne contiendra que très peu de démonstrations. Il ne s’agit pas non plus d’un survol exhaustif. Par exemple, nous ne parlerons pas d’une autre application intéressante à l’étude du Laplacien de Witten par Le Peutrec et al. (2013).

### 5.1. Applications aux transformations préservant l’aire. —

Cette partie aurait pu être intitulée “Applications en géométrie symplectique”. En effet, les transformations du plan (ou d’une surface plus générale) qui préservent l’aire sont un cas particulier des *transformations symplectiques* qui peuvent être définies sur des espaces plus généraux, de dimension arbitrairement grande. Nous nous restreignons à la dimension 2 par soucis de simplicité, mais la plupart des énoncés présentés ici admettent des généralisations.

Nous allons motiver le contenu de cette partie par un problème d’apparence anodine.

**5.1.1. Le problème du disque déplacé.** — Dans toute la partie 5.1, on note  $\mathbb{D}$  le disque euclidien de rayon 1 du plan  $\mathbb{R}^2$ . Nous entendrons par *disque*, toute partie du plan homéomorphe à  $\mathbb{D}$ . Nous dirons qu’un homéomorphisme  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  *déplace* un disque  $D \subset \mathbb{D}$  si

$$f(D) \cap D = \emptyset.$$

**Exercice 5.1.** — *Montrer que pour tout  $A > 0$  suffisamment petit, il existe un homéomorphisme arbitrairement proche de l'identité en norme uniforme qui déplace un disque d'aire  $A$ .*

Ce n'est pas si facile, mais c'est possible ! L'idée est de considérer une homothétie  $f : x \mapsto (1 - \varepsilon)x$ , que l'on modifie pour qu'il soit l'identité au voisinage du bord. Un tel  $f$  peut-être trouvé arbitrairement proche de l'identité. A l'intérieur de ce disque, on considère un disque  $D$  d'aire  $A$ , étiré et enroulé en spirale, comme sur la 24. Si on ajuste bien les choses, alors  $f$  déplace  $D$ . C'est possible dès que  $A < \frac{1}{2}\text{aire}(\mathbb{D})$ .

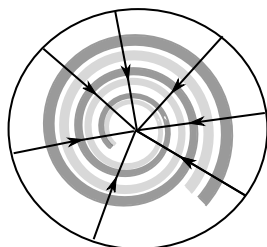


FIGURE 24. Un disque enroulé en spirale en gris et son image par homothétie en gris plus clair.

On voit sur cet exemple que  $f$  ne préserve pas du tout l'aire. Au contraire, elle la contracte. D'où la question suivante initialement posée par F. Béguin, S. Crovisier et F. Le Roux.

**Question 5.1 (Problème du disque déplacé)**

*Existe-t-il  $A > 0$  et un homéomorphisme arbitrairement proche de l'identité en norme uniforme **qui préserve l'aire** et déplace un disque d'aire  $A$  ?*

La réponse est négative comme prouvé indépendamment par Seyfaddini (2013) et Dore and Hanlon (2013). La solution passe par des méthodes assez avancées, l'un des ingrédients étant la théorie de la persistance. Comme ces travaux sont antérieurs à l'introduction du langage de la persistance dans ce domaine des mathématiques, les articles cités ci-dessus n'y font pas explicitement référence, mais la théorie est là de manière sous-jacente. Nous allons voir dans cette partie, comment elle apparaît dans la solution de ce problème. Au passage, nous mentionnerons d'autres applications.

**5.1.2. Les difféomorphismes conservatifs du plan sont hamiltoniens.** — Nous allons commencer par indiquer un procédé permettant de construire tous les difféomorphismes conservatifs (c'est-à-dire qui préservent l'aire) du plan à support compact. Pour une raison que nous expliquerons plus tard, on note  $(q, p)$  les coordonnées standard du plan.

Soit  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$  du plan, à support compact. On lui associe le champ de vecteurs  $X_H$  obtenu en appliquant une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  au gradient  $\nabla H$ . En coordonnées, cela donne

$$X_H(q, p) = (\partial_p H(q, p), -\partial_q H(q, p))$$

Notez que ce champ est partout tangent aux courbes de niveaux de  $H$ , donc les solutions de l'équation différentielle  $\dot{y} = X_H(y)$  suivent les courbes de niveau (Figure 25).

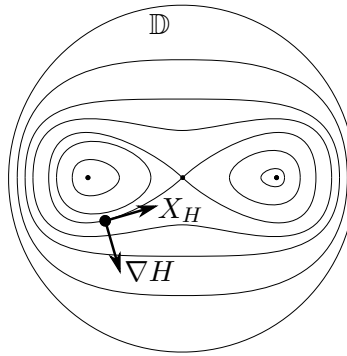


FIGURE 25. Le champ de vecteur  $X_H$  et les courbes de niveau.

La solution au temps  $t$  de cette équation avec condition initiale  $x$  est notée  $\phi_H^t(x)$ . Dans la suite, on suppose que cette solution existe en tout temps, ce qui peut être assuré en mettant des conditions sur  $H$  à l'infini. La famille d'applications  $(\phi_H^t)$  s'appelle le *flot hamiltonien* de  $H$ . Une version "à paramètre" du théorème de Cauchy Lipschitz, permet de montrer que pour tout  $t$ ,  $\phi_H^t$  est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 5.1.** —  $\phi_H^t$  préserve l'aire.

*Démonstration.* — La matrice jacobienne de  $\phi_H^t$  est la résolvante d'une équation linéaire associée à la jacobienne de  $X_H$ . Or celle-ci

prend la forme

$$\begin{pmatrix} \partial_{qp}^2 H & \partial_{pp}^2 H \\ -\partial_{qq}^2 H & -\partial_{pq}^2 H \end{pmatrix}$$

et est donc de trace nulle. On en déduit que le déterminant de la jacobienne de  $\phi_H^t$  vaut 1, ce qui signifie que  $\phi_H^t$  préserve l'aire.  $\square$

La dynamique ainsi obtenue est extrêmement simple, puisque les orbites suivent les courbes de niveau. On dit que le système est *intégrable*. Cependant, tout ce qui précède se généralise aux fonctions  $H$  dépendant du temps  $t$ , que l'on appelle *hamiltoniens*. On obtient alors un champ  $X_H$  dépendant du temps, ce qui ouvre la possibilité à des dynamiques plus compliquées. En combinant des théorèmes de Smale et Moser, on peut démontrer que tous les difféomorphismes du plan qui préservent l'aire sont obtenus par cette recette.

**Théorème 5.1.** — *Tout difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  qui préserve l'aire et coïncide avec l'identité hors d'un compact, est de la forme  $\phi_H^t$  pour un certain hamiltonien  $H = (H_t)_{t \in \mathbb{R}}$  à support compact de  $\mathbb{R}^2$ .*

Historiquement, le terme “hamiltonien” vient de la mécanique classique et de la formulation des équations de la mécanique newtonienne sous la forme des équations de Hamilton. La remarque suivante illustre ce lien avec la mécanique classique.

**Remarque 5.1 (Lien avec la mécanique classique)**

*Pour une fonction  $H$  de la forme*

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q),$$

*et en posant  $y(t) = (q(t), p(t))$ , l'équation différentielle  $\dot{y} = X_H(y)$  s'écrit sous la forme des équations de Hamilton :*

$$\begin{cases} \dot{q} = -p \\ \dot{p} = V'(q). \end{cases}$$

*Celles-ci impliquent la fameuse loi de Newton*

$$\ddot{q} = -V'(q).$$

*Ceci justifie le choix de notation pour nos coordonnées de  $\mathbb{R}^2$ . En effet,  $q$  représente la position et  $p$  la quantité de mouvement, comme en mécanique classique. La fonction  $H$  représente l'énergie du système. Elle est préservée au court du mouvement.*

**5.1.3.** *Fonctionnelle d'action et points fixes des difféomorphismes hamiltoniens.* — Soit  $H = (H_t)$  un hamiltonien. On appelle lacet de  $\mathbb{R}^2$ , toute application  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  et telle que  $x(0) = x(1)$ . On notera  $x(t) = (q(t), p(t))$  ses coordonnées. On peut définir sur l'espace des lacets, une fonction  $\mathcal{A}_H$  appelée *fonctionnelle d'action* et définie par

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_0^1 (p(t)\dot{q}(t) - H_t(q(t), p(t)))dt.$$

Remarquez que le premier terme ci-dessus s'interprète comme l'aire entourée par le lacet  $x$ .

Le classique principe de moindre action des physiciens se formule alors par :

**Proposition 5.2.** — *Les points critiques de  $\mathcal{A}_H$  sont les orbites du champ de vecteurs  $X_H$ . Par conséquent, ils sont en bijection avec les points fixes de  $\phi_H^1$ .*

*Démonstration.* — Ecrivons une perturbation d'un lacet  $x$  sous la forme  $x + \delta x$ . Alors, avec quelques abus de notation,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(x + \delta x) &= \int_0^1 \left( (p + \delta p)(\dot{q} + \delta \dot{q}) - H(q + \delta q, p + \delta p) \right) dt \\ &= \int_0^1 (p\dot{q} - H(q, p))dt + \int_0^1 (\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \partial_q H \delta q - \partial_p H \delta p)dt + o(\delta x) \end{aligned}$$

Par intégration par partie,  $\int_0^1 p \delta \dot{q} = - \int_0^1 \dot{p} \delta q$ , on obtient donc une formule pour la différentielle de  $\mathcal{A}_H$  :

$$d\mathcal{A}_H(x)(\delta x) = \int_0^1 ((\dot{p} + \partial_q H) \delta q + (\dot{q} - \partial_p H) \delta p) dt.$$

La proposition en découle.  $\square$

**5.1.4.** *Code-barres associé à un système hamiltonien.* — La proposition 5.2 est le point clé nous permettant d'utiliser les outils de la persistance pour étudier les difféomorphismes préservant l'aire. En effet, étant donné un tel difféomorphisme  $h$ , il s'écrit sous la forme  $\phi_H^1$  d'après le théorème 5.1, et l'on peut considérer le code-barres de la fonctionnelle d'action, c'est-à-dire le code-barres associé par la définition 3.12 au module de persistance donné par l'homologie des sous-niveaux de  $\mathcal{A}_H$ . Comme celle-ci n'est pas définie sur un espace de dimension finie les choses ne sont pas si simples, mais c'est l'idée. En pratique, on peut se ramener à la dimension finie en "approximant"

l'espace des lacets par des espaces de dimension finie (par exemple avec des lacet affines par morceaux, ou alors en tronquant la série de Fourier). Une autre approche consiste à passer par la théorie de Floer, une grosse machinerie permettant d'associer un code-barre à la fonctionnelle d'action dans des cadres très généraux.

**Théorème 5.2 (Polterovich and Shelukhin (2016))**

*On peut associer à  $\mathcal{A}_H$  un code-barres, dont les extrémités des barres correspondent aux valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$ . Ce code-barres ne dépend que de  $\phi_H^1$ , autrement dit, on peut associer à tout difféomorphisme conservatif  $\phi$  un code-barres  $B(\phi)$ .*

Remarquez que d'après la Proposition 5.2, les extrémités des barres de  $B(\phi)$  portent de l'information sur les points fixes de  $\phi$ . Par exemple, le nombre de barres minore le nombre de valeurs critiques, donc minore le nombre de points fixes.

Récemment, cette propriété des code-barres (qui admet une extension en dimension supérieure) a par exemple été exploitée avec succès pour démontrer une version en dimension supérieure d'un célèbre théorème de Franks (1996) qui affirme qu'un difféomorphisme conservatif de la sphère  $\mathbb{S}^2$  qui admet plus que deux points fixes doit nécessairement avoir une infinité d'orbites périodiques ;Shelukhin (2022).

**5.1.5. Deux théorèmes de stabilité.** — Le théorème de stabilité (théorème 4.1) admet l'analogie suivant dans le contexte présenté ici.

**Théorème 5.3.** — *Pour tous hamiltoniens  $H, K$  à support compact dans  $\mathbb{R}^2$*

$$d_b(B(\phi_H^1), B(\phi_K^1)) \leq \int_0^1 \|H_t - K_t\|_\infty dt$$

La quantité présente dans le membre de droite est appelé *norme de Hofer*. Elle est omniprésente dans le domaine de la géométrie symplectique.

Ce théorème signifie qu'une petite perturbation de l'énergie du système change peu le code-barres du point de vue de la distance bottleneck. Les barres détectent donc des points fixes qui persistent par perturbation de l'énergie du système.

On sait depuis longtemps (les travaux de Poincaré) que tous les difféomorphismes ne sont pas intégrables. On peut cependant se demander si à partir d'un système quelconque, on peut se ramener à un système intégrable en modifiant légèrement l'énergie du système. Ce

problème est ouvert à l'heure actuelle dans le disque mais il a été résolu (par la négative) sur les surfaces compactes sans bord autre que la sphère (Chor and Meiwes (2023); Polterovich and Shelukhin (2016)) où toutes les définitions et résultats qui précèdent se généralisent : *Soit  $\Sigma$  une surface compacte sans bord autre que la sphère et munie d'une forme d'aire. Alors, pour toute constante  $C$ , il existe un difféomorphisme  $\phi$  tel que pour tout hamiltonien  $H$  tel que  $\phi = \phi_H^1$ , et tout hamiltonien  $K$  intégrable (c'est-à-dire ne dépendant pas du temps) on ait  $\int_0^1 \|H_t - K\|_\infty dt \geq C$ .* La démonstration utilise les code-barres de manière crucial et le théorème de stabilité ci-dessus.

Le code-barre  $B(\phi)$  associé à un difféomorphisme  $\phi$  admet un autre type de stabilité. L'espace des code-barres est toujours muni de la distance bottleneck.

**Théorème 5.4 (Le Roux et al. (2021)).** — *L'application  $\phi \mapsto B(\phi)$  est continue sur l'espace des difféomorphismes conservatifs muni de la topologie de la convergence uniforme et s'étend par continuité à tous les homéomorphismes conservatifs.*

Ce résultat a des applications à l'étude des homéomorphismes conservatifs que nous ne détaillerons pas ici; cf. Le Roux et al. (2021).

**5.1.6. Retour au problème du disque déplacé.** — Le théorème 5.4 a permis une solution négative à la question 5.1

**Théorème 5.5 (Dore and Hanlon (2013); Seyfaddini (2013))**  
*Pour tout  $A > 0$ , il existe un voisinage de l'identité  $\mathcal{V}$  dans l'espace des difféomorphismes conservatifs du disque qui préservent l'aire, muni de la distance uniforme, telle que pour tout disque  $D$  d'aire  $A$  et tout élément de  $f \in \mathcal{V}$ , on ait  $f(D) \cap D \neq \emptyset$ .*

L'idée de la démonstration consiste à utiliser la propriété du code-barre suivante. Soit  $S$  l'ensemble constitué des extrémités des barres semi-infinies de  $B(\phi)$ . Notons  $\gamma(\phi)$  le diamètre de l'ensemble  $S$ . Un lemme dû à Viterbo (1992) affirme que *si  $\phi$  déplace un disque d'aire  $D$ , alors  $\gamma(\phi) \geq \text{aire}(D)$ .* Comme  $\gamma$  s'annule en l'identité, d'après le théorème 5.4, si  $\phi$  est proche de l'identité, alors  $\gamma(\phi)$  est proche de 0. D'après le lemme, il ne peut donc pas déplacer de disque d'aire trop grosse.

**5.2. Domaine nodaux et persistance (d’après Buhovsky et al.)** — Cette partie présente une très belle application de la persistance à l’étude géométrique des fonctions propres de l’opérateur laplacien, parue dans un travail récent de L. Buhovsky, J. Payette, I. Polterovich, L. Polterovich, E. Shelukhin et V. Stojisavljevic ; Buhovsky et al. (2022)

*Remerciements.* Nous sommes très reconnaissants envers Lev Buhovsky et Vukasin Stojisavljevic pour l’aide qu’ils nous ont apporté pour la préparation de cette partie.

**5.2.1. Le Laplacien, son spectre et ses fonctions propres.** — Dans toute la partie 5.2, on note  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine borné, c’est-à-dire un compact qui est l’adhérence d’un ouvert ouvert. Les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^n$  seront notées  $x_1, \dots, x_n$ . On munit également  $\mathbb{R}^n$  de la mesure de Lebesgue. On considère l’opérateur Laplacien

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

defini sur les fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient une condition de Dirichlet, c’est à dire qui s’annulent sur le bord de  $\Omega$ .

On s’intéresse aux valeurs propres et aux fonctions propres de cet opérateur. Pour les étudier précisément, il faudrait préciser sur quel espace de fonctions l’opérateur est défini. Pour ne pas nous écarter de notre propos, nous ne détaillerons pas, mais disons simplement qu’il faut se placer dans un certain espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  et étendre l’opérateur laplacien à cet espace à l’aide de la dérivation “faible” (appelée aussi “dérivation au sens des distributions”). Le résultat suivant résume les points essentiels (cf. par exemple (Levitin et al., 2023, 2.2.21)).

**Théorème 5.6.** — *Le spectre de l’opérateur  $\Delta$  est une suite croissante de réels*

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

*qui tend vers l’infini. Les fonctions propres correspondantes  $f_j$  sont de classes  $C^\infty$  et forment une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ .*

Par  $C^\infty$  on entend ici que les fonctions propres sont de classe  $C^\infty$  dans l’intérieur de  $\Omega$  et qu’elles s’étendent de manière  $C^\infty$  au voisinage des points de lissité du bord de  $\Omega$ .



**Exemple 5.1.** — Pour un rectangle  $\Omega = [0, a] \times [0, b]$  dans  $\mathbb{R}^2$ , les valeurs propres sont les réels de la forme

$$\lambda = \pi^2 \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right), \quad \alpha, \beta = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Elles correspondent aux fonctions propres

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\beta\pi}{b}y\right),$$

qui forment bien une base hilbertienne (par la théorie des séries de Fourier).

**5.2.2. Domaines nodaux et théorème de Courant.** — Définissons maintenant la notion centrale de la partie 5.2, les domaines nodaux.

**Définition 5.1.** — Etant donnée une fonction  $f$ , on appelle ensemble nodal de  $f$  l'ensemble  $f^{-1}(0)$ . Un domaine nodal de  $f$  est une composante connexe de  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$ . On notera  $m_0(f)$  le nombre de domaines nodaux de  $f$ .

Les expériences numériques montrent que les domaines nodaux deviennent de plus en plus complexes lorsque  $\lambda_j$  tend vers l'infini, donnant lieu à de belles images (voir par exemple figure 26)

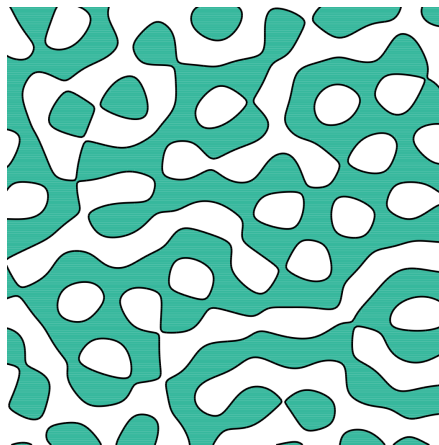


FIGURE 26. Exemple de domaines nodaux. Image réalisée par Dmitry Belyaev <http://people.maths.ox.ac.uk/belyaev/>.

**Exemple 5.2.** — Dans le cas d'un intervalle  $\Omega = [0, a]$ , la  $j$ -ième fonction propre est donnée par  $f_j(x) = \sin(\frac{j\pi}{a}x)$ . On voit que  $m_0(f_j) = j$ .

En dimension plus grande, il n'y a en général pas de telle égalité, mais nous avons une inégalité :

**Théorème 5.7 (Courant, 1923).** — Pour tout domaine  $\Omega$ ,

$$m_0(f_j) \leq j$$

Par ailleurs, la *loi de Weyl* affirme que le nombre  $N(\lambda)$  de valeurs propres plus petites que  $\lambda$  vérifie l'équivalent

$$N(\lambda) \sim C\lambda^{n/2}, \quad \text{où } C = \frac{\text{Vol}(B(1))\text{Vol}(\Omega)}{(2\pi)^n}.$$

Avec le théorème de Courant, nous en déduisons :

**Corollaire 5.1.** —

$$m_0(f_j) = O(\lambda_j^{n/2})$$

Les résultats ci-dessus restent vrais pour des opérateurs plus généraux dits de *Laplace-Beltrami*, qui généralisent le laplacien usuel sur des espaces courbés. On peut se demander dans quelle mesure le corollaire ci-dessus peut être généralisés au-delà. Voici plusieurs directions envisageables.

**Problème 5.1.** — Peut-on généraliser le théorème 5.7 et le corollaire 5.1

- (i) aux combinaisons linéaires de fonctions propres ?
- (ii) à d'autres opérateurs éventuellement d'ordre supérieur ?
- (iii) à l'homologie de degré supérieur, en considérant  $m_r(f) = \dim H_r(\Omega \setminus f^{-1}(0))$  ?

Le problème (i) est connu sous le nom de conjecture de Courant-Herrmann. Il a d'abord été résolu positivement, mais la démonstration comportait une erreur, et des contre exemples ont été donnés (par exemple Viro (1979)). Très récemment, Buhovsky, Logunov et Sodin ont construit un exemple d'opérateur de Laplace-Beltrami et une combinaison linéaire de deux fonctions propres ayant un nombre infini de domaines nodaux ; Buhovsky et al. (2020). Pour plus de détails sur ce problème, voir Buhovsky et al. (2022) et les références qui s'y trouvent.

Pour le problème (ii), une classe naturelle d'opérateurs à considérer est celle des *opérateurs elliptiques*, c'est-à-dire de la forme

$$(13) \quad Pf = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} + c(x)f,$$

avec  $A(x) = a_{ij}(x)$  une matrice symétrique définie positive. Cette famille d'opérateurs inclut les opérateurs de Laplace-Beltrami. De plus, tous les opérateurs elliptiques vérifient un théorème spectral analogue au théorème 5.6.

Malheureusement, comme montré par Buhovsky et al. (2022), la plupart des problèmes ci-dessus ont des réponses négatives. Cependant, la théorie de la persistance va permettre de formuler une version du théorème de Courant, qui répond positivement à tous ces problèmes.

**5.2.3. Le théorème de Courant "grossier".** — L'idée sous-jacente va être d'ignorer les "petites oscillations" pour ne garder que les oscillations significatives des fonctions.

**Définition 5.2 (Polterovich and Sodin (2007))**

Soit  $\delta > 0$ . Un domaine nodal  $U$  d'une fonction  $f$  est dit  $\delta$ -profond si  $\max_U |f| > \delta$ . Nous noterons  $m_0(f, \delta)$  le nombre de domaines nodaux  $\delta$ -profonds de  $f$ .

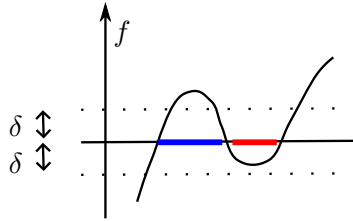


FIGURE 27. En bleu un domaine nodal  $\delta$ -profond, en rouge un domaine nodal non  $\delta$ -profond.

On peut aussi définir une version de degré homologique supérieur en posant

$$m_r(f, \delta) = \text{Rang} \left( H_r(\{|f| > \delta\}) \rightarrow H_r(\Omega \setminus f^{-1}(0)) \right),$$

où l'application ci-dessus est induite par l'inclusion.

La version grossière du théorème de Courant s'énonce comme suit :

**Théorème 5.8 (Buhovsky-Payette-Polterovich-Polterovich–Shelukhin-Stojisavljevic Buhovsky et al. (2022))**

Soit  $P$  un opérateur elliptique (par exemple le laplacien) sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Notons  $\mathcal{F}_\lambda$  l'espace engendré par les fonctions propres de  $P$  associées à des valeurs propres plus petites que  $\lambda$ . Soient  $r \geq 0$  et  $k > \frac{n}{2}$  des entiers. Alors, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\lambda > 0$ , tout  $\delta > 0$ , et toute fonction  $f \in \mathcal{F}_\lambda$  normalisée par  $\|f\|_{L^2(\Omega)} = 1$ , on ait

$$m_r(f, \delta) \leq C\delta^{-\frac{n}{k}}(1 + \lambda)^{\frac{n}{2}}.$$

Nous n'avons défini que les opérateurs elliptiques d'ordre 2, mais ce résultat s'applique en fait aussi aux opérateurs d'ordre supérieur.

On voit qu'en remplaçant le compte des domaines nodaux  $m_0(f)$  par un compte "grossier"  $m_0(f, \delta)$ , le Corollaire 5.1 est encore vérifié, ce quel que soit  $\delta$ . On voit aussi que cette version grossière à l'avantage de se généraliser dans chacune des trois directions proposées par le Problème 5.1.

Remarquez enfin que l'estimée que l'on obtient explose lorsque  $\delta$  tend vers 0.

**5.2.4. Quelques mots sur la démonstration.** — Terminons cette partie par quelques mots sur la démonstration du théorème 5.8, où l'on verra apparaître la théorie de la persistance. Nous aurons besoin de la norme Sobolev  $H^k$  d'une fonction  $f$  :

$$\|f\|_{H^k} := \sum_{i=1}^k \|D^i f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Etape 1 : estimées elliptiques.* — Des résultats très classiques d'analyse des opérateurs elliptiques affirment que la norme  $\|f\|_{H^k}$  d'une fonction propre associée à  $\lambda$  est contrôlée par une fonction de  $\lambda$  et par la norme  $L^2$  de  $f$ . Cela permet aux auteurs de réduire le théorème 5.8 au résultat suivant :

**Théorème 5.9.** — *Il existe une constante  $C > 0$ , telle que pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , et pour tout  $k > \frac{n}{2}$ , on a*

$$m_r(f, \delta) \leq C\delta^{-\frac{n}{k}} \|f\|_{H^k}^{\frac{n}{2}}.$$

Notez que ce résultat s'applique à toute fonction, il n'y a plus d'opérateur elliptique dans cet énoncé.

Pour la suite, nous aurons besoin de la notation suivante. Pour toute fonction  $f$ , notons  $N_\delta(f)$  le nombre de barres finies de longueur strictement supérieures à  $\delta$  dans le code-barres de  $f$ . Comme  $m_r(f, \delta) \leq N_\delta(-|f|)$ , il nous suffit d'être capable de contrôler la quantité  $N_\delta(f)$ .

*Etape 2. Le cas des polynômes sur un cube.* — Un résultat classique de Milnor (1964) affirme qu'une fonction polynôme générique de degré  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$  admet au plus  $(k-1)^n$  points critiques. Ce résultat peut être traduit en termes de code-barres par l'estimée :

$$(14) \quad N_0(Q) = O(k^n)$$

*Etape 3. Le théorème de stabilité entre en jeu.* — Le théorème de stabilité (Théorème (4.1)) implique les inégalités suivantes. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que  $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ , alors on a :

$$N_\delta(f) \leq N_{\delta-2\varepsilon}(g) \leq N_{\delta-4\varepsilon}(f).$$

On voit donc qu'à l'aide de (14), on obtiendra une estimation de  $N_\delta(F)$  si l'on obtient une bonne approximation de  $f$  par des polynômes.

*Etape 4. Approximation polynomiale.* — Le théorème de Morrey-Sobolev affirme que dans l'espace des fonctions continues sur le cube  $[0, a]^n$  muni de la norme uniforme, la distance d'une fonction lisse  $f$  à l'espace des polynômes de degré  $\leq k-1$  est majorée par

$$Ca^{k-\frac{n}{2}} \|D^k f\|_{L^2([0, a]^n)}.$$

Ceci fournit la "bonne approximation" espérée et permet de résoudre le cas du cube.

*Etape 5. Du cube à tout domaine.* — Cette dernière étape est délicate. Les auteurs du théorème 5.8, parviennent à passer du cube à tout domaine  $\Omega$  en remplissant  $\Omega$  avec des cubes de taille variable. Cela passe par des arguments d'algèbre sur les modules de persistance, permettant de recoller les estimées présentes sur les différents cubes. On a par exemple une formule du type :

$$N_{2\delta}(f|_{U_1 \cup U_2}) \leq N_\delta(f|_{U_1}) + N_\delta(f|_{U_2}) + N_\delta(f|_{U_1 \cap U_2}).$$

Ceci termine cette exposition des grandes lignes de la démonstration. Signalons que la très belle idée consistant à passer par une approximation polynomiale pour obtenir des estimées sur toute fonction avait déjà été utilisée par Yomdin (1985).

## Références

- Barannikov, S. A. (1994). The framed Morse complex and its invariants. In *Singularities and bifurcations*, volume 21 of *Adv. Soviet Math.*, pages 93–115. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- Buhovsky, L., Logunov, A., and Sodin, M. (2020). Eigenfunctions with infinitely many isolated critical points. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (24) :10100–10113.
- Buhovsky, L., Payette, J., Polterovich, I., Polterovich, L., Shelukhin, E., and Stojisavljević, V. (2022). Coarse nodal count and topological persistence, ArXiv :2206.0634.
- Chor, A. and Meiwes, M. (2023). Hofer’s geometry and topological entropy. *Compos. Math.*, 159(6) :1250–1299.
- Dore, D. N. and Hanlon, A. D. (2013). Area preserving maps on  $S^2$  : a lower bound on the  $C^0$ -norm using symplectic spectral invariants. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 20 :97–102.
- Franks, J. (1996). Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero. *New York J. Math.*, 2 :1–19, electronic.
- Le Peutrec, D., Nier, F., and Viterbo, C. (2013). Precise Arrhenius law for  $p$ -forms : the Witten Laplacian and Morse-Barannikov complex. *Ann. Henri Poincaré*, 14(3) :567–610.
- Le Roux, F., Seyfaddini, S., and Viterbo, C. (2021). Barcodes and area-preserving homeomorphisms. *Geom. Topol.*, 25(6) :2713–2825.
- Levitin, M., Mangoubi, D., and Polterovich, I. ([2023] ©2023). *Topics in spectral geometry*, volume 237 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Milnor, J. (1964). On the Betti numbers of real varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 :275–280.
- Polterovich, L. and Shelukhin, E. (2016). Autonomous Hamiltonian flows, Hofer’s geometry and persistence modules. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(1) :227–296.
- Polterovich, L. and Sodin, M. (2007). Nodal inequalities on surfaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 143(2) :459–467.
- Seyfaddini, S. (2013). The displaced disks problem via symplectic topology. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 351(21-22) :841–843.
- Shelukhin, E. (2022). On the Hofer-Zehnder conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 195(3) :775–839.
- Usher, M. (2011). Boundary depth in Floer theory and its applications to Hamiltonian dynamics and coisotropic submanifolds. *Israel J. Math.*, 184 :1–57.

- Viro, O. J. (1979). Construction of multicomponent real algebraic surfaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 248(2) :279–282.
- Viterbo, C. (1992). Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.*, 292(4) :685–710.
- Yomdin, Y. (1985). Global bounds for the Betti numbers of regular fibers of differentiable mappings. *Topology*, 24(2) :145–152.